

9 Stugheid en sterkte van materialen.

Onderwerpen:

- Rek.
- Spanning.
- Elasticiteitsmodulus.
- Treksterkte.
- Spanning-rek diagram.

9.1 Toepassing in de techniek.

In de techniek kom je allerlei opstellingen en machines tegen die opgebouwd zijn uit verschillende materialen. Als op materialen krachten worden uitgeoefend willen we meestal graag dat de constructie heel blijft. We nemen als voorbeeld een liftkabel. In de liftkabel ontstaat een spanning door het gewicht van de lift maar ook door de versnelling die de lift krijgt. Door de spanning in de kabel wordt deze iets langer. Als er geen spanning op de kabel staat is het gewenst dat de kabel zijn oorspronkelijke lengte weer terugkrijgt, zoals bij een veer die uitgerekt wordt. In het ergste geval, bijvoorbeeld door slecht onderhoud, kan de kabel breken en een ernstig ongeval veroorzaken.

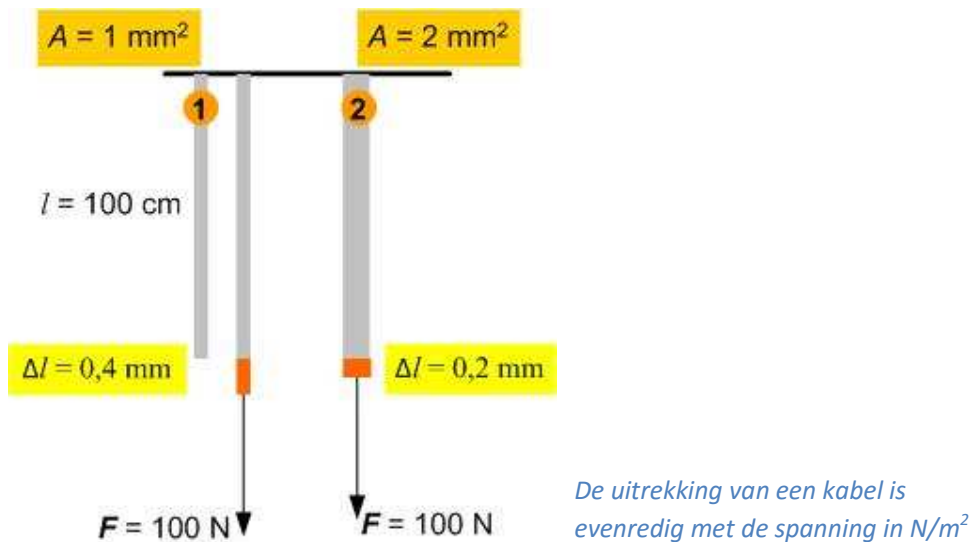
Om dit te realiseren moet de kabel de juiste sterkte en dus de juiste dikte hebben en moet deze gemaakt zijn van het hiervoor meest geschikte materiaal.



Liftkabel

4.2 De spanning σ in een kabel of staaf

Een belangrijke eigenschap voor de lengteverandering van een staaf of kabel is de spanning. Bij een grotere spanning is de lengteverandering groter.



Kabel 1 heeft een doorsnede van 1 mm^2 en ondervindt een kracht van 100 N .
De spanning in deze kabel is dus $100 \text{ N}/\text{mm}^2$.
De uitrekking van deze kabel is $0,4 \text{ mm}$.

Kabel 2 heeft een doorsnede van 2 mm^2 en ondervindt een kracht van 100 N .
De spanning in deze kabel is dus $50 \text{ N}/\text{mm}^2$.
De uitrekking van deze kabel is $0,2 \text{ mm}$.

Je kunt kabel 2 beschouwen als 2x kabel 1 naast elkaar waarbij aan iedere kabel een kracht van 50 N trekt. Dus de uitrekking is $0,5$ x zo groot.

Conclusie: De uitrekking is evenredig met de spanning in de kabel.

Definitie

De spanning σ is de kracht in een staaf of kabel per m^2 .

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

ρ is spanning in N/m^2 of Pa

F is de spankracht in N

A is de doorsnede (loodrecht oppervlak) van de staaf in m^2

Bij een staaf kan de spanning een drukspanning of een trekspanning zijn.

Bij een drukspanning neemt de lengte af.

Voorbeeld

Een metalen draad heeft een diameter van 2,00 mm.

Aan deze draad hangt een massa van 10 kg.

- Bereken de spanning in de draad in N/mm^2 .
- Bereken de spanning in de draad in Pa.
- Wat gebeurt er met de spanning als de diameter groter is.

a) $A = \pi \cdot r^2 \rightarrow A = \pi \times (1,00)^2 = 3,14 \text{ mm}^2$
 $F = m \cdot g \rightarrow F = 10 \text{ kg} \times 9,8 \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 98 \text{ N}$
 $\sigma = \frac{F}{A} \rightarrow \sigma = \frac{98 \text{ N}}{3,14 \text{ mm}^2} = 31,2 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

b)

$$\sigma = \frac{F}{A} \rightarrow \sigma = \frac{98 \text{ N}}{3,14 \text{ mm}^2} = 31,2 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$
$$\sigma = 31,2 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 31,2 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 3,12 \cdot 10^7 \text{ Pa} \quad \text{afgerond: } \sigma = 3,1 \cdot 10^7 \text{ Pa}$$

opm: $1 \text{ m}^2 = 10^6 \text{ mm}^2$, dus op 1 m^2 is de kracht $10^6 \times$ zo groot

- Als de diameter groter is, is de oppervlakte groter en is de kracht per mm^2 kleiner.

Opgave 9.1

In een draad heerst een spankracht van 400 N.

De draad heeft een doorsnede van $1,50 \text{ mm}^2$

Bereken de spanning in de draad.

Opgave 9.2

Een aluminiumstaaf ($d = 5,0 \text{ mm}$) ondervindt een trekkracht .

De spanning in de staaf is 23 MPa.

Bereken de trekkracht.

Opgave 9.3

Een kabel krijgt door een kracht van 1000 N een lengtetoe name van 6,0 mm.

Wat zal de lengteverandering zijn als je drie van deze kabels langs elkaar bevestigd.

Opgave 9.4

Een draad heeft een spanning van 30 N/mm^2 .

Hoeveel kracht wordt er op de draad uitgeoefend bij een doorsnede van 10 mm^2 .

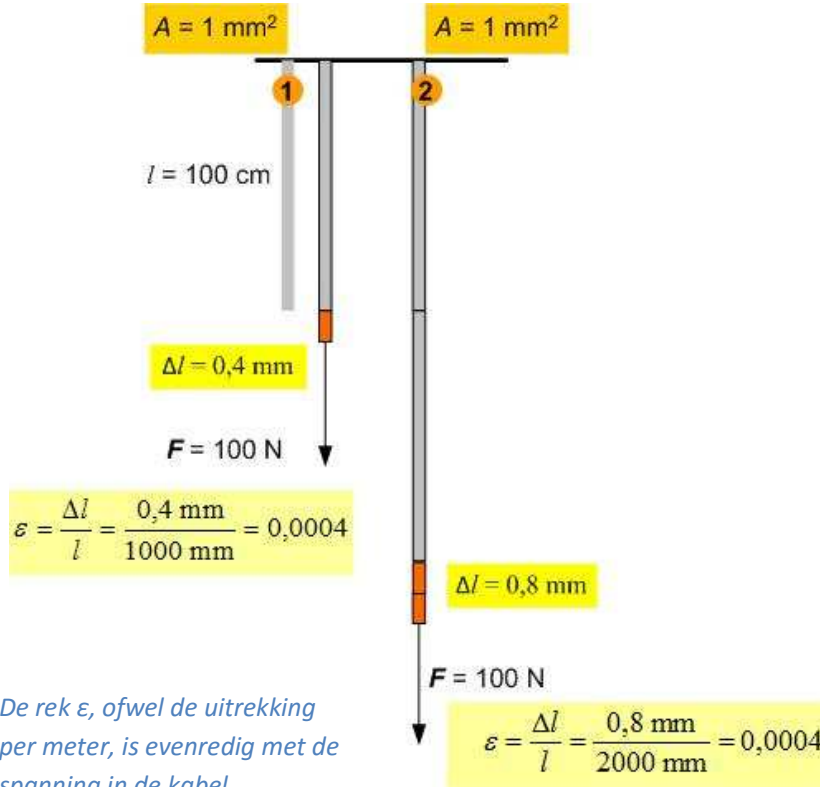
4.3 De rek ε van een kabel of staaf

In kabel 1 en 2 is de spanning hetzelfde, namelijk 100 N/mm^2 . Je kunt kabel 2 beschouwen als 2 kabels van 1 m lengte achter elkaar. De uitrekking is daarom 2x zo groot.

De uitrekking per meter (ε) blijft echter hetzelfde! Deze hangt af van de spanning in de kabel.

Als de kracht (F) op de kabel 2x zo groot wordt of als de doorsnede (A) 2x zo klein wordt zal de uitrekking per meter (ε) 2x zo groot worden.

Conclusie: ε is evenredig met σ



De rek ε , ofwel de uitrekking per meter, is evenredig met de spanning in de kabel.

Definitie

De rek ε is de lengteverandering per meter ofwel de relatieve lengteverandering.

Als een draad van 2 m lengte een 0,8 mm langer wordt, dan is de rek

$$\varepsilon = \frac{0,8 \text{ mm}}{2 \text{ m}} = \frac{0,0008 \text{ m}}{2 \text{ m}} = 0,0004 \text{ m/m} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ m/m} \quad \text{of } \varepsilon = 4 \cdot 10^{-4} \quad \text{of } \varepsilon = 0,04\%$$

Als een draad van 1 m lengte 0,4 mm langer wordt, dan zal bij dezelfde kracht een draad van 2m lengte 0,8 mm langer worden.

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

ε is de rek

Δl is de lengteverandering in mm of m

l is de oorspronkelijke lengte in m

De SI-eenheid van ε is m/m. Als $\varepsilon = 0,01$ betekent dat 0,01 m per meter lengte.

Afgeleide eenheden zoals mm/m worden ook gebruikt.

Voorbeeld

Een kabel heeft een lengte van 20 m. Door een bepaalde spanning in de kabel wordt de kabel 1,6 cm langer. Bereken de rek.

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \rightarrow \varepsilon = \frac{1,6 \text{ cm}}{20 \text{ m}} = \frac{0,016 \text{ m}}{20 \text{ m}} = 0,00080$$

$\varepsilon = 0,01$ kun je ook schrijven als $\varepsilon = 1\%$, ofwel de lengteverandering is 1% van de oorspronkelijke lengte.

Opgave 9.5

Bepaal de rek van een kabel die door de spanning in de kabel per meter 0,5 mm langer is geworden.

Opgave 9.6

Waarom mag je de eenheid van de rek weglaten?

Opgave 9.7

Wat betekent $\varepsilon = 0,1\%$?

Opgave 9.8

Welke notatie heeft jouw voorkeur en waarom?

- a) $\varepsilon = 0,023$
- b) $\varepsilon = 2,3 \text{ cm/m}$
- c) $\varepsilon = 2,3 \%$
- d) $\varepsilon = 0,023 \text{ m/m}$

Opgave 9.9

Een staaf heeft een lengte van 50,0 cm en ondervindt een trekkracht van 500 N. De staaf heeft een diameter van 3,0 mm. Bij deze spanning ontstaat er een rek van 0,20 mm/m.

- a) Bereken de spanning in de staaf in N/mm^2 .
- b) Bereken de uitrekking van de staaf in mm.
- c) Bereken de rek bij een kracht van 1000 N.
- d) Bereken de rek bij een kracht van 500 N en een diameter van 1,5 mm?

4.3 De elasticiteitsmodulus E van een materiaal

Als je aluminium draad en een staaldraad van dezelfde lengte en doorsnede met dezelfde kracht gaat belasting zal er ondanks dezelfde lengte en doorsnede toch een verschil in uitrekking zijn. De aluminium draad zal verder uitrekken omdat aluminium zachter is dan staal. De materiaaleigenschap die een maat is voor de rek bij een bepaalde spanning noemen we de elasticiteitsmodulus E .

Hoe groter E des te stugger het materiaal.

Definitie

De elasticiteitsmodulus E is het verhoudingsgetal tussen de spanning in een kabel en de rek van de kabel. Ieder materiaal heeft een specifieke waarde voor E .

Voor een draad of staaf geldt:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \text{ in } \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \text{ of Pa} \quad \text{wet van Hooke}$$

σ is spanning in $\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ of Pa

ε is de rek in $\frac{\text{m}}{\text{m}}$

materiaal	elasticiteitsmodulus E (GPa)	treksterkte (MPa)
aluminium	69	95
koper	117	70
Staal RVS	180	502
rubber	0,1 – 0,01	
eiken hout (langs vezel)	11	
glas	50-90	

Waardes afkomstig van de site engineering toolbox

Voorbeeld

Een stalen kabel heeft een doorsnede van $4,0 \text{ mm}^2$ en een lengte van $10,0 \text{ m}$. Bereken de lengteverandering bij een kracht van 1000 N .

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{1000 \text{ N}}{4 \text{ mm}^2} = 250 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 250 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 2,5 \cdot 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{2,5 \cdot 10^8}{180 \cdot 10^9} = 0,00139$$

$$\frac{\Delta l}{l} = 0,00139 \rightarrow \Delta l = 0,00139 \times l = 0,00139 \times 10 = 0,0139 \text{ m} = 1,4 \text{ cm}$$

Opgave 9.10

Een aluminium staaf van 50 cm lengte wordt $1,0 \text{ mm}$ uitgerekt. Bereken de spanning in de staaf.

Opgave 9.11

Een lift heeft een massa van 1000 kg en wordt d.m.v. een stalen kabel opgehesen.
Bij het optrekken is de versnelling $2,0 \text{ m}^2/\text{s}$.
De rek van de kabel mag maximaal 0,2% zijn.
Bereken de minimale diameter van de kabel.

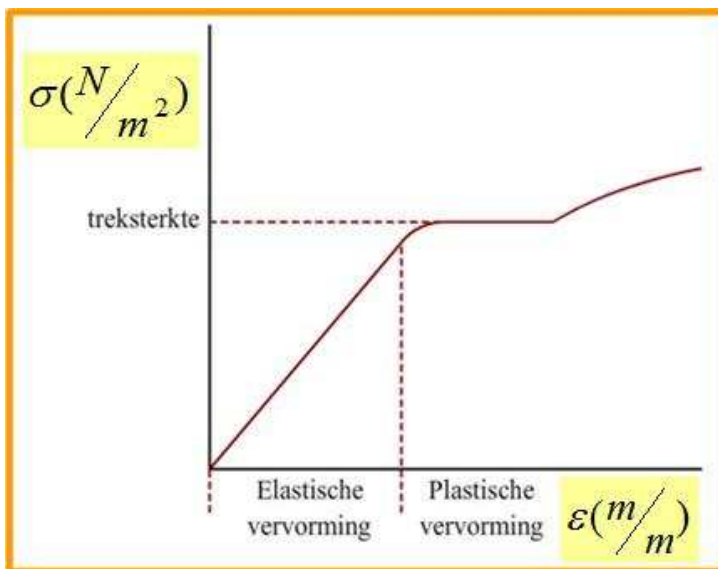
Opgave 9.12

Een kabel die 2x zo dik is, heeft een 4x zo kleine rek bij dezelfde spankracht.
Leg uit waarom dat zo is.

Opgave 9.13

Een nylon draad heeft een diameter van 0,80 mm. $E_{\text{nylon}} = 3,0 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$.
De draad wordt gebruikt om een vlieger in de lucht te houden en heeft een lengte van 40 m.
De kracht op de draad is 30 N.
a) Bereken de spanning in de draad.
b) Bereken de rek en de uitrekking van de draad.

4.3 Het spanning-rekdiagram



Spanning-rekdiagram van een metaal.

Een draad wordt langer als deze een spankracht ondergaat.
We hebben in de vorige paragraaf laten zien dat de spanning evenredig is met de rek en dat de evenredigheidsconstante E een materiaalconstante is.
Als de kracht op de draad wegvalt en de draad komt weer terug in zijn oorspronkelijke lengte, zoals dat meestal het geval is bij een veer of elastiek, spreken we van een elastische vervorming.

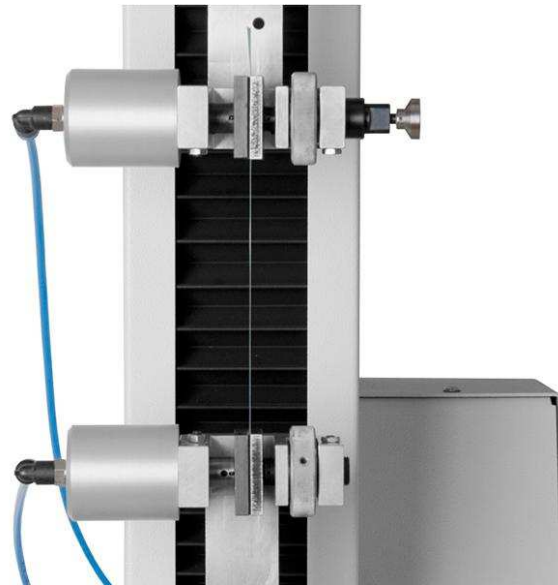
De wet van Hooke, $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$, is alleen geldig voor de elastische vervorming.

Bij een bepaalde waarde van de spanning 'veert' een draad of staaf niet meer terug!
De staaf wordt langer terwijl de spanning hetzelfde blijft.

Er is sprake van plastische vervorming of vloeien van het materiaal. Bij een bepaalde waarde van de rek neemt de spanning toe omdat de doorsnede minder wordt. De staaf zal vervolgens breken.

De waarde van de spanning waarbij de staaf plastisch gaat vervormen noemt men de Treksterkte (σ_T) van het materiaal. Als de spanning gelijk wordt aan de treksterkte is een constructie onbetrouwbaar en onveilig.

Een spanning-rekdiagram wordt gemaakt met een trekbank. Dit is een instrument waarbij de lengteverandering gemeten wordt bij verschillende krachten.



Trekbank

Definitie

De treksterkte is de spanning waarbij het materiaal plastisch gaat vervormen en waarbij de wet van Hooke niet meer geldig is.

symbool: σ_T eenheid: N/m^2

Voorbeeld

Voor RVS-staal geldt: $E = 180 \text{ GPa}$; $\sigma_T = 500 \text{ MPa}$

De stalen kabel wordt gebruikt om een auto aan te trekken. De kabel in de kabel moet onder de treksterkte blijven. De kabel heeft een doorsnede van 30 mm^2 .

- Bereken de maximale rek van een stalen RVS-kabel.
- Bereken de maximale kracht die de kabel kan uitoefenen.
- Bereken de maximale lengteverandering per meter.

$$\text{a) } E = \frac{\sigma_T}{\varepsilon} \rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma_T}{E} = \frac{0,5 \text{ GPa}}{180 \text{ GPa}} = 0,0028$$

$$\text{b) } \sigma = \frac{F}{A} \rightarrow F = \sigma_T \cdot A = 500 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times 30 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 = 15000 \text{ N} = 15 \text{ kN}$$

$$\text{c) } \varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \rightarrow \Delta l = \varepsilon \cdot l = 0,0028 \times 1 = 0,0028 \text{ m} = 2,8 \text{ mm}$$

Opgave 9.14

Waarom is de waarde van E gelijk aan de helling in het spanning-rek-diagram bij elastische vervorming ?

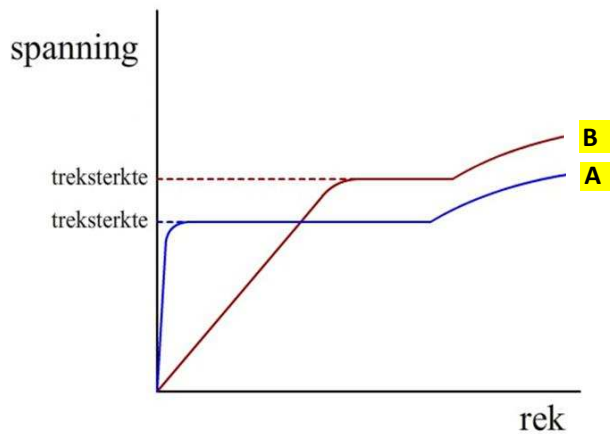
Opgave 9.15

Een aluminium staaf heeft een lengte van 30,0 cm en een diameter van 1,0 cm.

- a) Hoe groot is de spanning in de staaf als plastische vervorming optreedt?
- b) Bereken de trekkracht die dan wordt uitgeoefend.
- c) Bereken de uitrekking van de staaf op dat punt.

Opgave 9.16

In de afbeelding zijn de spanning-rekdiagrammen te zien van twee materialen.



- a) Welk materiaal heeft de grootste elasticiteitsmodulus? Geef verklaring.
- b) Welk materiaal heeft de grootste treksterkte?

We kennen ook nog een andere formulering van de wet van Hooke!

We kennen de wet van Hooke ook in de vorm $C = \frac{F}{\Delta l}$.

Hierin is C de veerconstante, F de veerkracht en Δl de uitrekking van de draad.

Een draad met $C = 500 \text{ N/mm}$ wordt 1mm langer door een kracht van 500 N. Hoe groter C hoe stugger de draad.

Je kunt afleiden dat $C = \frac{E \cdot A}{l}$

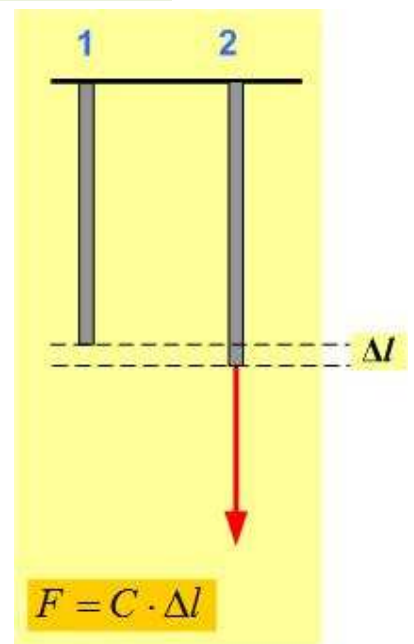
Een lange dunne draad heeft een lage waarde voor de veerconstante.

De formule $C = \frac{F}{\Delta l}$ geldt ook voor de uitrekking van een veer.

Opgave 9.17

Leid de formule van de veerconstante af.

Tip: substitueer σ en ϵ in de formule van de elasticiteitsmodulus.



Samenvatting hoofdstuk 9

- S1 Voor de uitrekking van een draad is spanning een belangrijkere grootte dan kracht. Waarom is dat zo?
- S2 Hoe bereken je de spanning in een draad of staaf?
- S3 Geef een aantal mogelijke eenheden van spanning.
- S4 Wat is de betekenis van de rek van een materiaal?
- S5 Hoe bereken je de rek van een draad of staaf?
- S6 Welke eenheden kun je gebruiken voor de grootte rek?
- S7 Wat is de betekenis van treksterkte van een metaal?
- S8 Welke informatie kun je halen uit een spanning-rekdiagram?
- S9 Welke twee formuleringen gelden er voor de wet van Hooke?