2. Kwadratische functies.

2.1

R1 De term ax^2 is bepalend voor zeer grote waardes van x.
Als a < 0 dan wordt de term ax^2 zeer groot en negatief zowel bij $x \to -\infty \quad en \quad x \to +\infty$ Er is sprake van een bergparabool met maximum.
Als a > 0 dan wordt de term ax^2 zeer groot en positief zowel bij . $x \to -\infty \quad en \quad x \to +\infty$ Er is sprake van een dalparabool met minimum.
Als a = 0 dan is er sprake van een eerste graads functie in is de grafiek een rechte lijn.

R2 De coëfficiënt c is gelijk aan het snijpunt met de y-as.

$$f(0) = c$$

$$Als\ f(0) = 0\ dan\ f(x) = \mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}x = x(\mathrm{a}x + \mathrm{b})$$

$$x_1 = 0\ en\ x_2 = -\frac{b}{a}$$

R3 Als a en b beide positief of negatief zijn ligt de top of het dal links van de y-as.
Als a en b beide een tegengesteld teken hebben ligt de top of het dal rechts van de y-as.

R4 Als de top van de parabool onder de x-as ligt en a < 0 zijn er geen snijpunten met de x-as, omdat er dan sprake is van een bergparabool met een maximum onder x-as.

R5 Bij een dalparabool zijn er geen snijpunten als het minimum boven de x-as ligt en als a > 0 .

2.2

R6 Als je het functievoorschrift $f(x) = \mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c}$ schrijft in de vorm $f(x) = \mathrm{a}(x + \mathrm{p})(x + \mathrm{q})$ dan kun je meteen de snijpunten met de x-as en de plaats van het dal of top bepalen.
Voorbeeld:

$$\boxed{f(x) = 2(x-2)(x+3) \quad f(x) = 0 \text{ als } x_1 = 2 \text{ of als } x_2 = -3}$$

$$\boxed{f(x) = 2(x-2)(x+3) = 2(x^2 - 2x + 3x - 6) = 2(x^2 + x - 6)}$$

Je moet 2 getallen zoeken die opgeteld +1 en vermenigvuldigd -6 opleveren. Dat zijn +3 en -2
Dit gaat alleen met mooie getallen.
Dit lukt je niet bij bijv. $\boxed{x^2 + 1{,}1x - 6)}$

coördinaten van de top:

$$\boxed{\begin{aligned} x_{dal} &= \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2-3}{2} = -0{,}5 \\ y_{dal} &= 2((-0{,}5)^2 - 0{,}5 - 6)) = -12{,}5 \end{aligned}}$$

R7

Als de snijpunten met de x-as en de coördinaten van de top gegeven zijn kun je het functievoorschrift opstellen.
Voorbeeld:

$$x_1 = -2 \; en \; x_2 = 4 \; en \; top : (1;\, 4)$$
$$\to f(x) = a(x+2)(x-4)$$
$$\to 4 = a(1+2)(1-4) \to 4 = -9a \to a = -\frac{4}{9}$$
$$\to f(x) = -\frac{4}{9}(x+2)(x-4)$$

R8

Als de snijpunten met de x-as en de coördinaten van een punt op de grafiek gegeven zijn kun je het functievoorschrift opstellen.
Voorbeeld:

$$x_1 = -2 \; en \; x_2 = 4 \; en \; punt : (1;\, 3)$$
$$\to f(x) = a(x+2)(x-4)$$
$$\to 3 = a(1+2)(1-4) \to 3 = -9a \to a = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$$
$$\to f(x) = -\frac{1}{3}(x+2)(x-4)$$

R10

Het voordeel om het functievoorschrift $f(x) = ax^2 + bx + c$ te schrijven in de vorm $f(x) = a(x + p)^2 + q$ is dat je meteen de coördinaten van de top of het dal kunt zien.
Voorbeeld:

$$\to f(x) = -2(x+2)^2 + 4 \quad \text{bergparabool dus top}$$
p = -2 en q = 4
$$\to top : (-2;\, 4)$$
Als $x = -2$ dan $y = 4$

Als $x \neq -2$ dan $y < 4$

R11 De grafiek van $f(x) = ax^2 + bx + c$ is eerst 1 schaaldeel naar rechts verschoven en vervolgens 4 schaaldelen naar beneden verschoven en dan krijg je: $g(x) = a(x - 1)^2 + b(x - 1) + c - 4$

R12 Laat zien dat $x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$.

$$(x+a)(x-a) = x^2 - ax + ax - a^2 = x^2 - a^2$$

Laat zien dat $x^8 - a^8 = (x^4 + a^4)(x^2 + a^2)(x + a)(x - a)$.

$$(x^8 - a^8) = (x^4 + a^4)(x^4 - a^4) = (x^4 + a^4)(x^2 + a^2)(x^2 - a^2)$$
$$= (x^4 + a^4)(x^2 + a^2)(x+a)(x-a)$$

Kwadraten zoals x^4, a^4 , x^2 en a^2 zijn altijd positief.

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Laat zien dat $x^2 + 4kx + k^2 = (x + 2k)^2 - 3k^2$. (k = constante)

$$a(x+p)^2 + q = ax^2 + 2apx + ap^2 + q$$
$$ax^2 + 2apx + ap^2 + q \lhd\rhd x^2 + 4kx + k^2$$
$$\to a = 1$$
$$\to 2ap = 4k \to p = \frac{2k}{a} = 2k$$
$$\to ap^2 + q = k^2 \to q = k^2 - ap^2 = k^2 - 4k^2 = -3k^2$$
$$x^2 + 4kx + k^2 = (x+2k)^2 - 3k^2$$

R13 Voor de snijpunten met x –as geldt: $a(x + p)^2 + q = 0$

Dus $(x + p) = \pm\sqrt{\frac{-q}{a}} \to x_{1,2} = -p \pm \sqrt{\frac{-q}{a}}$

coördinaten van de top of het dal: (-p; q)

Voorbeeld :
$$f(x) = -2(x+3)^2 - 6 \to top : (-3; -6)$$

Als (-q/a) < 0 dan geen snijpunten ?

Voorbeeld :
$$f(x) = -2(x+3)^2 - 6 \to top : (-3; -6)$$
$$-\frac{q}{a} = -\frac{-6}{-2} = -3$$
top ligt onder x – as

Als (-q/a =0 ofwel als q = 0) is er één raakpunt met de x-as.

Voorbeeld :
$$f(x) = -2(x+3)^2 \to top : (-3; 0)$$

R14

$f(x) = ax^2 + bx + c$ $\quad a, b,$ *en* c geven informatie over de vorm van de parabool

$f(x) = a(x + p)(x + q)$ $\quad$ snijpunten $x_1 = -p$ *en* $x_2 = -q$

$f(x) = a(x + p)^2 + q$ $\quad$ top of dal (-p; q)

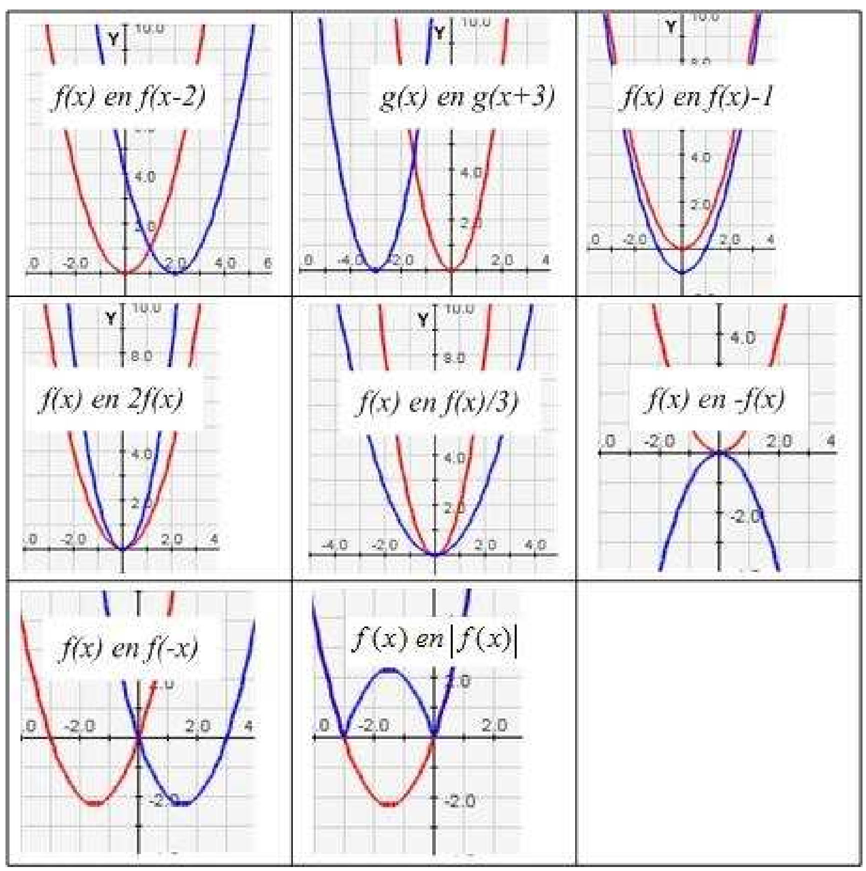
R15 De abc-formule is de algemene tool om de oplossingen van een vierkantsvergelijking te vinden.
Voorbeeld.

$$f(x) = 2{,}2x^2 - 4{,}1x - 3$$
$$x_{1,2} = \frac{4{,}1 \pm \sqrt{(-4{,}1)^2 - 4 \times 2{,}2 \times -3}}{2 \times 2{,}2} = \frac{4{,}1 \pm \sqrt{43{,}21}}{4{,}4}$$
$$x_1 = \frac{4{,}1 - \sqrt{43{,}21}}{4{,}4} \quad en \quad x_2 = \frac{4{,}1 + \sqrt{43{,}21}}{4{,}4}$$
$$afgerond:$$
$$x_1 = -0{,}562 \quad en \quad x_2 = 2{,}43$$

R16 De term (b^2 -4ac) noemt men de discriminant D.
Als D < 0 dan geen snijpunten met x-as
Als D = 0 dan één raakpunt met x-as
Als D > 0 dan 2 snijpunten met x-as

R17 Voor de extreme waarde van een parabool (top of dal) gelden de coördinaten $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$.
Het zelf afleiden van de abc-formule is een nuttige oefening in algebraïsche vaardigheid.

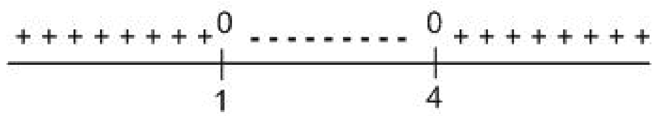
R18



R19 Als $f(x) > g(x)$ dan $f(x) - g(x) > 0$

Voorbeeld:

$$f(x) > g(x)$$
$$2x^2 - 3x + 2 > x^2 + 2x - 2$$
$$\rightarrow 2x^2 - 3x + 2 - (x^2 + 2x - 2) > 0$$
$$\rightarrow x^2 - 5x + 4 > 0 \quad \textit{dalparabool}$$
$$\rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 1 \times 4}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$
$$\rightarrow x_1 = 1 \; en \; x_2 = 4$$
$$Dus\; f(x) - g(x) > 0 \; als \; x < 1 \; of \; x > 4$$



R20 3 vergelijkingen met 3 onbekenden
Je moet 100 kg mengsel van de stoffen A, B en C maken.
Dit mengsel moet 5% A, 20% B en 75% C bevatten.
Je hebt een mengsel ABC met 2 % A en 10% B, een mengsel ABC met 30% B en 60% C en een mengsel ABC met 5% A en 60% C
Stel x kg met 2% A, y kg met 20% B en z kg 5%A

1 $x + y + z = 100$
2 $0{,}02x + 0{,}1y + 0{,}05z = 0{,}05 \times 100 \quad stof\ \ A$
3 $0{,}1x + 0{,}3y + 0{,}35z = 0{,}2 \times 100 \quad stof\ \ B$

1 $x + y + z = 100$
2 $0{,}02x + 0{,}1y + 0{,}05z = 5 \qquad \times 50$

$x + y + z = 100$
$x + 5y + 2{,}5z = 250 \quad -$
4 $-4y - 1{,}5z = -150$

1 $x + y + z = 100$
3 $0{,}1x + 0{,}3y + 0{,}35z = 0{,}2 \times 100 \qquad \times 10$

$x + y + z = 100$
$x + 3y + 3{,}5z = 200 \quad -$
5 $-2y - 2{,}5z = -100$

4 $-4y - 1{,}5z = -150$
5 $-2y - 2{,}5z = -100 \qquad \times 2$

$-4y - 1{,}5z = -150$
$-4y - 5z = -200 \quad -$
$0 + \quad 3{,}5z = 50 \rightarrow z = \dfrac{50}{3{,}5} = 14{,}3\ kg$
4 $-4y - 1{,}5 \times 14{,}3 = -150 \rightarrow -4y = -128{,}6 \rightarrow y = 32{,}2\ kg$
1 $x + 14{,}3 + 32{,}2 = 100 \rightarrow x = 53{,}5\ kg$