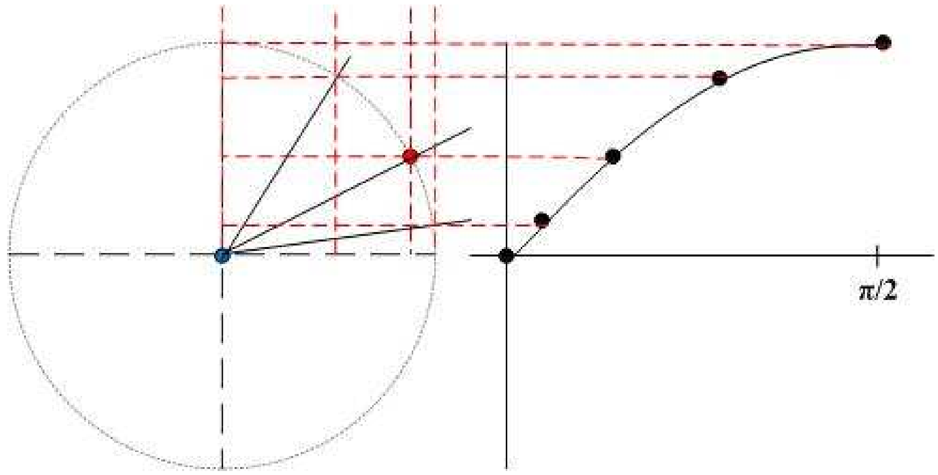
6. Goniometrische functies.

R1 Wat heeft een cirkelomwenteling te maken met een sinus of cosinus?

Als een punt met constante snelheid een cirkelbeweging uitvoert en je zet hoogte van het punt uit tegen de hoek waarover gedraaid is dan krijg je een sinusvormige grafiek.
Dat is ook het geval als je de horizontale afstand van het punt uitzet tegen de hoek.



6.1

R2 Omzetten van graden naar radialen.

$$360^0 = 2\pi \text{ rad} \rightarrow 1^0 = \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

$$x^0 = x \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

$$\text{afgerond}: x^0 = 0{,}01745x \text{ rad}$$

$$\text{voorbeeld}: 45^0 = 0{,}785 \text{ rad}$$

$$90^0 = 1{,}57 \text{ rad}$$

R3 Omzetten van radialen naar graden.

$$2\pi \text{ rad} = 360^0 \rightarrow 1 \text{ rad} = \frac{360^0}{2\pi}$$

$$x \text{ rad} = x \cdot \frac{360^0}{2\pi} \quad \text{afgerond}: x \text{ rad} = 57{,}3x^{\ 0}$$

$$\text{voorbeeld}: 3{,}14 \text{ rad} = 180^0$$

$$1\ rad = 57{,}3^0$$

R4

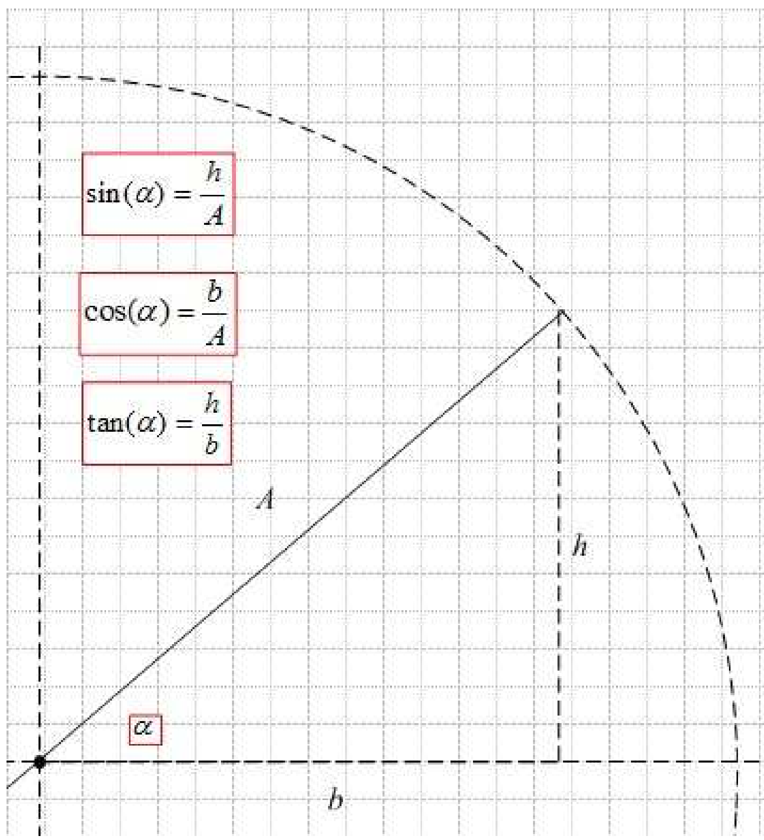
$$\sin(\alpha) = \frac{h}{A} \quad en \quad -1 \le \frac{h}{A} \le 1$$
$$\cos(\alpha) = \frac{b}{A} \quad en \quad -1 \le \frac{b}{A} \le 1$$
$$\tan(\alpha) = \frac{h}{b} \quad \frac{h}{b} \to \infty \quad als\ \alpha \to \pi/2$$

sin(α) is maximaal 1 bij $\alpha = \pi/2$ rad $= 90^0$

sin(α) is minimaal -1 bij $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ rad $= 270^0$

cos(α) is maximaal 1 bij $\alpha = 0$ rad $= 0^0$

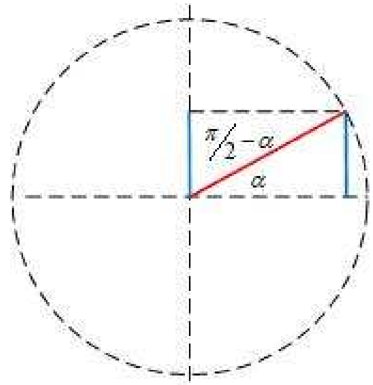
cos(α) is minimaal -1 bij $\alpha = \pi$ rad $= 180^0$



R5

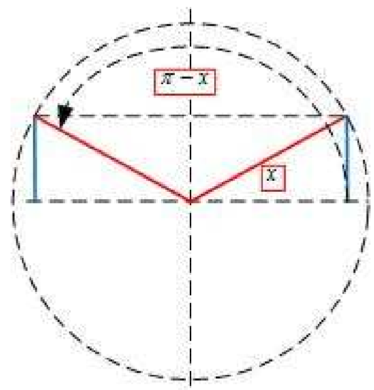
Bij een middelpuntshoek van 1 rad en een straal van 2m heeft de bijbehorende cirkelboog een lengten 2m.
Bij een middelpuntshoek van 2π rad en een straal van 2m heeft de bijbehorende cirkelboog een lengte van $2\pi \times r = 4\pi = 12{,}56$ m
Deze lengte noemt men de **omtrek.**

R6 sin(α) = cos(π/2 – α) zie figuur



sin(α) = sin(α + 2π) omdat na 1 omwenteling de hoek weer hetzelfde is.

Als sin(x) = a , dan ook sin(x + k·2π) = a en ook
sin(π – x + k·2π) = a ($k \in$ Z)
zie figuur



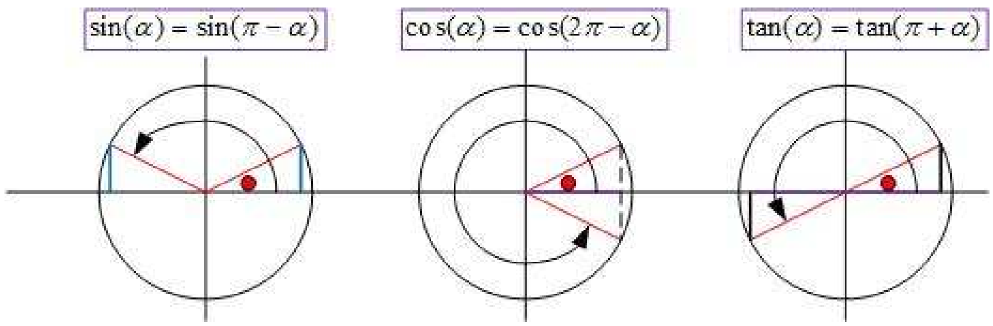
R7 Waarom geldt: $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$? ($\sin^2(\alpha) = (\sin(\alpha))^2$?

$$\sin^2(\alpha) = \frac{h^2}{A^2} \quad \rightarrow h^2 = A^2 \cdot \sin^2(\alpha)$$
$$\cos^2(\alpha) = \frac{b^2}{A^2} \rightarrow b^2 = A^{2\cdot} \cos^2(\alpha)$$
$$h^2 + b^2 = A^2 \rightarrow A^2 \cdot \sin^2(\alpha) + A^{2\cdot} \cos^2(\alpha) = A^2$$
$$\rightarrow \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

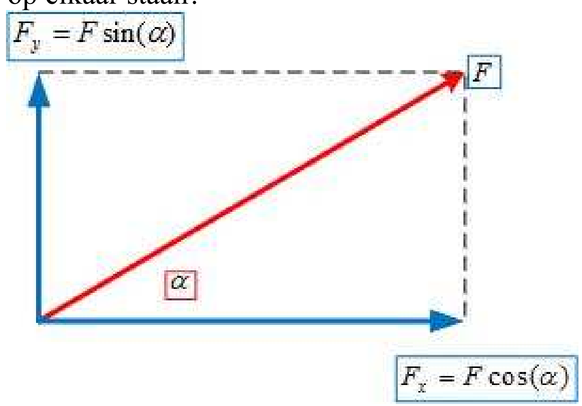
R8 Als je de sinus, cosinus of tangens kent kun je via de inverse functie de hoek berekenen.
Voorbeeld:

$$\sin(x) = 0{,}3 \rightarrow x = \arcsin(0{,}3) \quad \textit{of} \quad x = \pi - \arcsin(0{,}3)$$
$$\rightarrow x = 0{,}305 \text{ rad} \quad \text{of } x = 3{,}14 - 0{,}305 = 2{,}84 \text{ rad}$$
$$\cos(x) = 0{,}7 \rightarrow x = \arccos(0{,}7) \quad \textit{of} \quad x = 2\pi - \arccos(0{,}7)$$
$$\rightarrow x = 0{,}795 \text{ rad} \quad \text{of} \quad x = 6{,}28 - 0{,}795 = 5{,}485 \text{ rad}$$
$$\tan(x) = 0{,}45 \rightarrow \text{x} = \arctan(0{,}45) \quad \text{of} \quad x = \pi + \arctan(0{,}45)$$
$$\rightarrow x = 0{,}423 \text{ rad} \quad \text{of} \quad x = 3{,}14 + 0{,}423 = 3{,}563 \text{ rad}$$

R9 sin(π – α) = sin(α)
cos(2π – α) = cos(α)
tan(π + α) = tan(α)

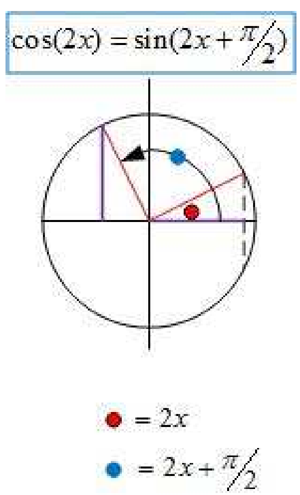


R10 Hoe kun je een vector ontbinden in een x- en y-component?
Hoe kun je een vector ontbinden in 2 componenten die loodrecht op elkaar staan?



6.2

R11 Waarom is cos(2x) = sin(2x + π/2)

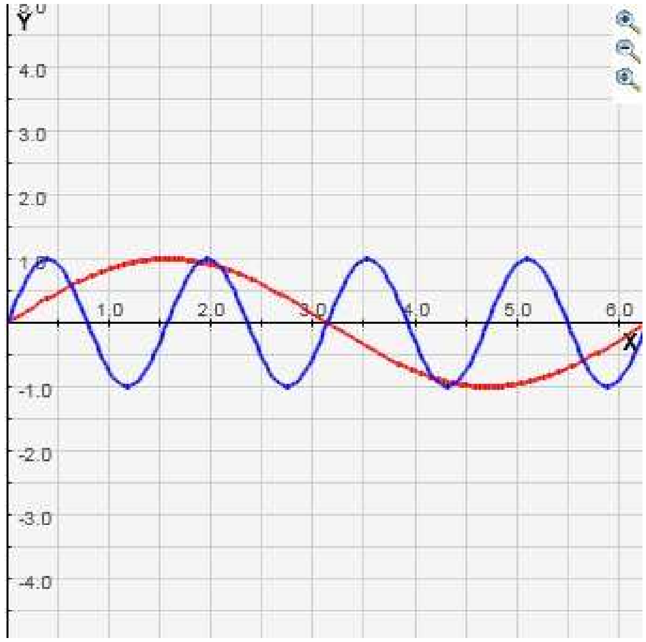


R12 Wat is het voordeel om het functievoorschrift sin(2x + π/2) te schrijven als sin2(x + π/4)?
Op deze manier zie je dat de grafiek van sin(2x) $\pi/2$ rad naar links verschoven is.

R13 Geef het functievoorschrift van een sinus met een 4x zo korte periode in rad dan $y = \sin(x)$

$y = \sin(x)$ $\quad$ 1 *omwenteling of periode voor* $[0,2\pi]$

$y = \sin(4x)$ $\quad$ 4 *omwentelingen voor* $[0,2\pi]$



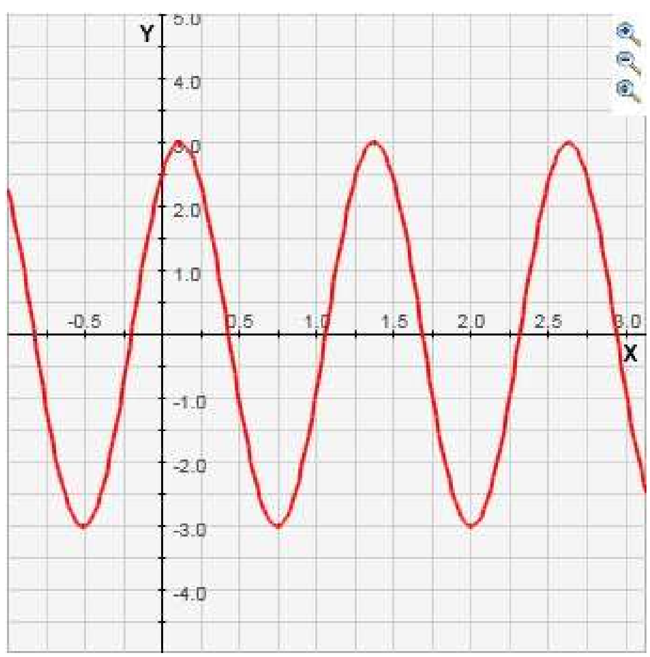
R14 Voor een harmonische beweging geldt : $y = 3\sin(5x + 1)$

5 *periodes voor domein* $[0,2\pi]$

dus 1 *periode voor domein* $[0,\frac{2\pi}{5}]$

De frequentie is 5 ,ofwel 5 omwentelingen als x verandert van 0 tot 2π.

R15 $y = 3\sin(5x + 1)$ voor het domein $[0,\pi]$.



Hoeveel is de grafiek van deze functie verschoven t.o.v. 3sin(5x)?

$3\sin(5x+1) = 3\sin 5(x+0{,}2)$

De grafiek is 0,2 rad naar links verschoven.(klopt met figuur)

R16 Bij $2\sin(3x)$ heb je 1 periode voor

$0 \le x \le \frac{2\pi}{3}$ *of* *domein* $[0,2\pi]$

Bij $\sin(x)$ heb je 1 periode voor het domein [0,2π].

Bij $\sin(0{,}5x)$ heb je 0,5 periode voor het domein [0,2π].

1.3

R17 De grafiek van sin2(x - 1) is 1 rad naar rechts verschoven t.o.v. de grafiek van sin(2x).

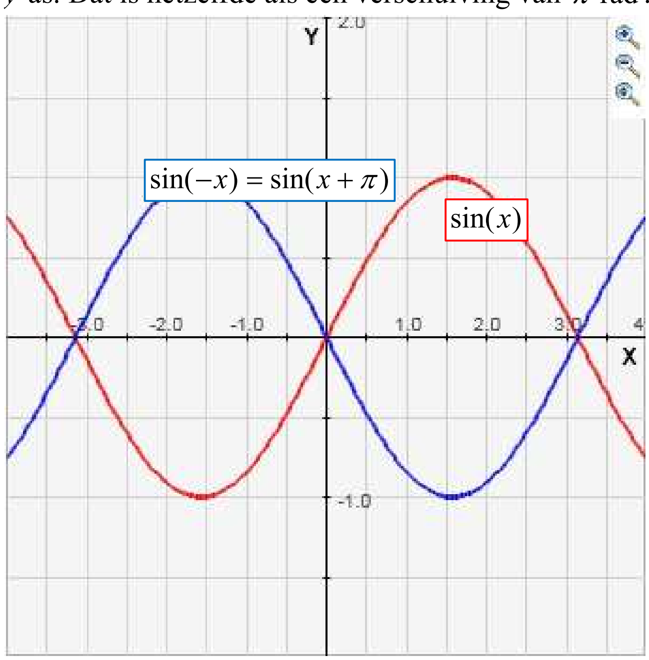
bij x = 1 heeft sin2(x - 1) dezelfde y-waarde als bij sin(2x) bij x = 0. De grafiek is dus 1 rad naar rechts verschoven.

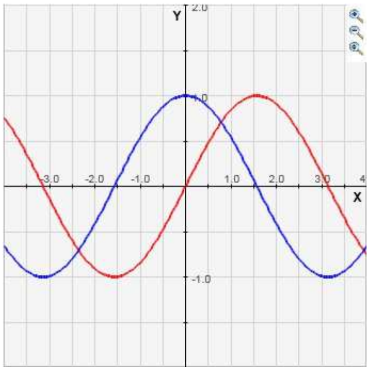
$2\sin(2x-1)+1 = 2\sin 2(x-0{,}5)+1$

De periode is gehalveerd, de grafiek is 0,5 rad naar rechts verschoven en 1 schaaldeel naar boven t.o.v. de grafiek van sin(x)?

R18 De grafiek van sin(-x) is 3,14 radialen verschoven t.o.v. de grafiek van sin(x).

De grafiek van sin(-x) is de grafiek van sin(x) gespiegeld t.o.v. de y-as. Dat is hetzelfde als een verschuiving van π rad .

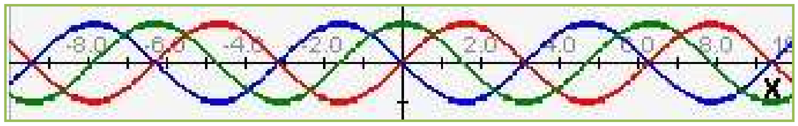




R19 $\cos(x) = \cos(-x) = \sin(\pi/2 - x)$

De grafiek van cos(x) is $\pi/2$ naar links verschoven t.o.v van de grafiek van sin(x).

R20



rood = sin(x)
blauw = sin(-x)
groen = sin(π/2 – x)

R21 Wat is het verschil in de grafiek van sin(x+2) en sin(x) + 2?
De grafiek $\sin(x+2)$ is 2 rad naar links verschoven t.o.v. de grafiek van sin(x).
De grafiek van sin(x) +2 is 2 schaaldelen naar boven verschoven t.o.v. de grafiek van sin(x).

6.3

R22 Bij een harmonische trilling kun je altijd een cirkelbeweging denken. De projectie van het rondddraaiend punt op de horizontale en verticale as verandert volgens een sinus of cosinus. Als je de tijd en dus de hoekverdraaiing weet kun je ook de verandering uitrekenen in horizontale en verticale richting.

R23 Leg uit waarom $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ rad/s

In T seconden wordt een hoek afgelegd van 2π radialen.

De hoeksnelheid $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ rad/s

R24 In plaats van α kun je ook de formule $(\frac{2\pi}{T}t + \alpha_0)$ gebruiken.

α_0 is de beginhoek (op $t = 0$) en $\frac{2\pi}{T} \cdot t$ is de afgelegde hoek in t seconden.

In plaats van $(\frac{2\pi}{T}t + \alpha_0)$ kun je ook $(2\pi ft + \alpha_0)$ of $(\omega t + \alpha_0)$ gebruiken.

$$\boxed{f = \frac{1}{T} \quad en \quad \varpi = \frac{2\pi}{T}}$$

Als je de waarde van de trillende grootheid op $t = 0$ weet kun je daarmee de beginhoek uitrekenen.

R25 Voor de uitwijking van een verende massa t.o.v. de evenwichtsstand geldt: $u(t) = A\sin(\frac{2\pi}{T}t + \alpha_0)$.

Voor de snelheid geldt: $v(t) = v_{\max}\cos(\frac{2\pi}{T}t + \alpha_0)$.

Als de maximale waarde in de $u(t)$-grafiek bereikt is , is de snelheid 0.
Als $u(t) = 0$ dan is de snelheid maximaal.

R26 Geef een verklaring voor de vorm van de grafiek van $f(x) = \sin^2(x)$ of $f(x) = (\sin(x))^2$.
Door het kwadraat is $\sin^2(x)$ altijd positief .

R27 Voor punt P geldt: $y(t) = 4\sin(2{,}5t + 1)$
Voor punt Q geldt: $y(t) = 4\sin(2{,}5t + 2)$
Beide punten liggen op een koord waar een sinusvormige golf doorheen gaat. Beschrijf het verschil in beweging van P en Q.
P en Q voeren beide een trilling uit met dezelfde amplitude en frequentie ,alleen is er een hoekverschil van 1 rad.

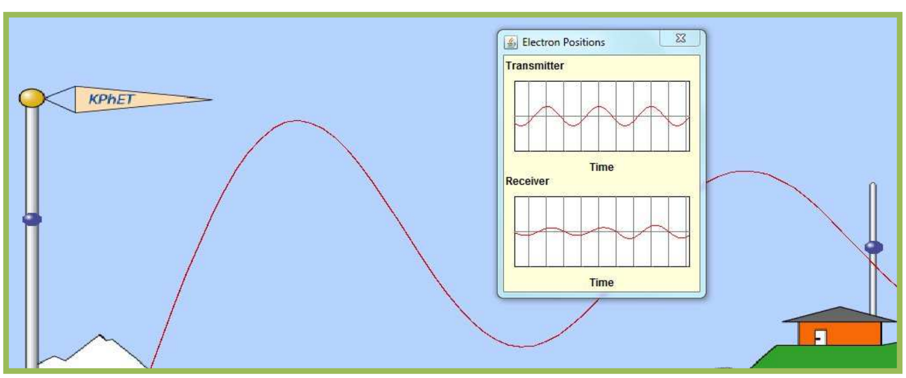
Dus als Q op zijn maximale waarde is, moet P nog $\frac{1}{2{,}5} = 0{,}4\ s$ bewegen voordat deze de maximale waarde heeft.

R28 Als je de cirkelbeweging zou tekenen bij een slinger is het wellicht inzichtelijker om deze 90^0 te verdraaien.
De hoek van de cirkelbeweging is dan 0 als de uitwijking 0 is.

R29 Als een punt dat een harmonische trilling uitvoert via een elastische tussenstof of via een elektrische- of magnetische kracht verbonden is met andere punten, dan gaan deze punten ook een harmonische trilling uitvoeren. Hoe verder verwijderd van de bron hoe later deze punten beginnen. In het functievoorschrift is dit te zien aan de beginhoek.

6.12

Punt bij de bron : $U(t) = 4\sin(2\pi f t)$
Voor punt op 6,3 golflengtes verder geldt:
$U(t) = 4\sin(2\pi f(t - 6{,}3T))$
Bekijk hiervoor ook applet 6.12 .



6.4

R23 Bij de vergelijking $0{,}4x + 3 = 2{,}5 + k \cdot 2\pi$ moet je hoek x uitrekenen.

$$\boxed{\begin{array}{l} 0{,}4x + 3 = 2{,}5 + k \cdot 2\pi \rightarrow 0{,}4x = -0{,}5 + k \cdot 2\pi \\ \rightarrow x = \dfrac{-0{,}5}{0{,}4} + k \cdot 2\pi = -1{,}25 + k \cdot 2\pi \end{array}}$$

Dit blijkt niet te kloppen!

Je moet alles delen door 0,4, dus

$$\boxed{\begin{array}{l} 0{,}4x + 3 = 2{,}5 + k \cdot 2\pi \rightarrow 0{,}4x = -0{,}5 + k \cdot 2\pi \\ \rightarrow x = \dfrac{-0{,}5}{0{,}4} + \dfrac{k \cdot 2\pi}{0{,}4} = -1{,}25 + k \cdot 5\pi \end{array}}$$

R24 $2\sin(x + 2) > A$

De maximale waarde van $A = 2$

$2\tan(3x - 1) < B$

B heeft geen maximale waarde.