

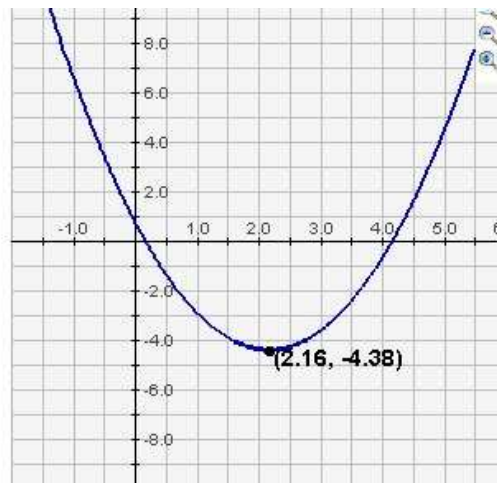
2. Kwadratische functies.

Opgave 2.1 De waarden van a, b en c in de drie voorbeeldfuncties.

a

	1	2	3
x	v	t	x
y	s	h	0
a	0,064	-4,9	1,1
b	0	10	-4,75
c	0	5	0,75

b $1,1 \cdot x^2 - 4,75x + 0,75 = 0$



$$f(x) = 1.1 * x^2 - 4.75 * x + 0.75$$

Change Function
Reset Sliders
Slider Limits...

$$x_1 = 0,16 \quad \text{en} \quad x_2 = 4,16$$

$$x(\text{dal}) = \frac{0,16 + 4,16}{2} = 2,16 \quad \text{klopt met grafiek}$$

c

a	a > 0 dan krijg je een dalparabool a < 0 dan krijg je een bergparabool kleinere waarde van a geeft een smallere grafiek
b	a en b tegengesteld teken dan top of dal rechts van de y-as a en b hetzelfde teken dan top of dal links van de y-as
c	c is het snijpunt met de y-as

Opgave 2.2

Oefenen met $a(x+p)(x+q)$ en $ax^2 + bx + c$

Controleer je antwoorden met applet [2.1](#)

a $f(x) = a(x+2)(x-5)$
 $f(x) = 0$ als $x = -2$ of als $x = 5$
de grafiek heeft 2 snijpunten met x-as, nl. $x_1 = -2$ en $x_2 = 5$
 $5 = a(0+2)(0-5) \rightarrow 5 = -10a \rightarrow a = -\frac{5}{10} = -0,5$
 $f(x) = -0,5(x+2)(x-5)$

b $f(x) = a(x-1)(x-5)$
 $f(x) = 0$ als $x = 1$ of als $x = 5$
de grafiek heeft 2 snijpunten met x-as, nl. $x_1 = 1$ en $x_2 = 5$
 $-3 = a(0-1)(0-5) \rightarrow -3 = 5a \rightarrow a = -\frac{3}{5} = -0,6$
 $f(x) = -0,6(x-1)(x-5)$

c $f(x) = a(x+0,5)(x-1)$
 $f(x) = 0$ als $x = -0,5$ of als $x = 1$
de grafiek heeft 2 snijpunten met x-as, nl. $x_1 = -0,5$ en $x_2 = 1$
 $-2 = a(0+0,5)(0-1) \rightarrow -2 = -0,5a \rightarrow a = \frac{-2}{-0,5} = 4$
 $f(x) = 4(x+0,5)(x-1)$

d Bereken de coördinaten van het maximum of minimum bij a en b.

opgave a $x(\text{top}) = \frac{x_1 + x_2}{2} \rightarrow x(\text{top}) = \frac{-2 + 5}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$
 $y(\text{top}) = -0,5 \times 3,5 \times 3,5 = 6,125$
top : (1,5 ; 6,125)

opgave b $x(\text{top}) = \frac{x_1 + x_2}{2} \rightarrow x(\text{top}) = \frac{1 + 5}{2} = \frac{6}{2} = 3$
 $y(\text{top}) = -0,6 \times 2 \times -2 = 2,4$
top : (3 ; 2,4)

e $f(x) = 2(x+2)(x+3) = 2(x^2 + 5x + 6) = 2x^2 + 10x + 12$

f $f(x) = -(x+3)(x-1) = 2(x^2 + 2x - 3) = 2x^2 + 4x - 6$

g $f(x) = -3(x-1)(x+2) = -3(x^2 + x - 2) = -3x^2 - 3x + 6$

h Teken de snijpunten met de x-as en bereken de plaats van top of dal.

Bij opgave e

$$x_1 = -2 \quad x_2 = -3 \quad \text{en} \quad x(\text{dal}) = -2,5$$

$$y(\text{dal}) = 2(-0,5)(+0,5) = -1$$

$$\text{dal} : (-2,5 ; -1)$$

Opgave 2.3

Ontbind in factoren ofwel schrijf in de vorm $f(x) = a(x+p)(x+q)$

Het ontbinden in factoren lukt alleen met mooie getallen en is bedoeld om de snijpunten met de x-as te bepalen.

a

$$f(x) = 2x^2 + 4x - 6 = 2(x^2 + 2x - 3)$$

zoek 2 getallen met product -3 en som $+2$

$$(-1) \times (3) = -3 \quad \text{en} \quad (-1) + (3) = 2$$

-1 en $+3$ zijn de juiste getallen

$$f(x) = 2(x^2 + 2x - 3) = 2(x-1)(x+3)$$

Controleer je antwoorden met applet 1.3.

b $f(x) = -3x^2 - 9x + 12 = -3(x^2 + 3x - 4)$

zoek 2 getallen met product -4 en som $+3$

$$(-1) \times (+4) = -4 \quad \text{en} \quad (-1) + (4) = 3$$

-1 en $+4$ zijn de juiste getallen

$$f(x) = -3(x^2 + 3x - 4) = -3(x-1)(x+4)$$

Controleer je antwoorden met applet 1.3.

c $f(x) = -x^2 + 2x + 24 = -(x^2 - 2x - 24)$

zoek 2 getallen met product -24 en som -2

$$(-6) \times (4) = -24 \quad \text{en} \quad (-6) + (4) = -2$$

-6 en $+4$ zijn de juiste getallen

$$f(x) = -(x^2 - 2x - 24) = -(x-6)(x+4)$$

Controleer je antwoorden met applet 1.3.

d

$$f(x) = 4x^2 - 4 = 4(x^2 - 1)$$

zoek 2 getallen met product -1 en som 0

$$(-1) \times (1) = -1 \quad \text{en} \quad (-1) + (1) = 0$$

-1 en $+1$ zijn de juiste getallen

$$f(x) = 4(x^2 - 1) = 4(x+1)(x-1)$$

Controleer je antwoorden met applet 1.3.

e

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

zoek 2 getallen met product -3 en som $+2$

$$(-1) \times (3) = -3 \quad \text{en} \quad (-1) + (3) = +2$$

$$(x+3)(x-1) = 0$$

$$x_1 = -3 \quad \text{en} \quad x_2 = 1$$

snijpunten met de x -as : $(-3 ; 0)$ en $(1 ; 0)$

f

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

zoek 2 getallen met product -8 en som -2

$$(-4) \times (2) = -8 \quad \text{en} \quad (-4) + (2) = -2$$

$$(x+2)(x-4) = 0$$

$$x_1 = -2 \quad \text{en} \quad x_2 = 4$$

snijpunten met de x -as : $(-2 ; 0)$ en $(4 ; 0)$

g

$$2x^2 - 8x - 42 = 0 \rightarrow 2(x^2 - 4x - 21) = 0$$

zoek 2 getallen met product -21 en som -4

$$(3) \times (-7) = -21 \quad \text{en} \quad (3) + (-7) = -4$$

$$(x+3)(x-7) = 0$$

$$x_1 = -3 \quad \text{en} \quad x_2 = 7$$

snijpunten met de x -as : $(-3 ; 0)$ en $(7 ; 0)$

h

$$-x^2 + 4x - 3 = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-1)(x-3) = 0$$

snijpunten met de x -as : $(1 ; 0)$ en $(3 ; 0)$

Opgave 2.4**Functievoorschrift opstellen bij grafiek.**

a

$$A: f(x) = a(x+6)(x-6)$$

$$-18 = a(0+6)(0-6) \rightarrow a = \frac{-18}{-36} = 0,5$$

$$\rightarrow f(x) = 0,5(x-6)(x+6)$$

$$B: f(x) = a(x+2)(x-4)$$

$$-8 = a(0+2)(0-4) \rightarrow a = 1$$

$$\rightarrow f(x) = (x+2)(x-4)$$

$$C: f(x) = a(x-1)(x-3)$$

$$6 = a(-1)(-3) \rightarrow a = \frac{6}{3}$$

$$f(x) = 2(x-1)(x-3)$$

$$D: f(x) = a(x+2)(x-4)$$

$$8 = a(2)(-4) \rightarrow a = -1$$

$$f(x) = -(x+2)(x-4)$$

b

$$(x-6)(x+6) = x^2 + 6x - 6x - 36 = x^2 - 36$$

c Werk haakjes weg bij $(x-6)^2$

$$(x-6)^2 = (x-6)(x-6) = x^2 - 6x - 6x + 36 = x^2 - 12x + 36$$

De term $-6x$ komt $2 \times$, $-12x$ wordt het dubbele product genoemd

d

$$x^2 - 36 = (x+6)(x-6)$$

Dit wordt een bijzonder product genoemd van de soort

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

e Welke van de twee onderstaande grafieken hoort bij opgave **c** ?

$$(x-6)^2 = 0 \text{ als } x = 6$$

De blauwe grafiek heeft een raakpunt bij $x = 6$.

Opgave 2.5**Functievoorschrift in de vorm van $f(x) = a(x + p)^2 + q$**

Door een kwadraat af te splitsen kun je meteen zien waar de top of het dal ligt.

a $f(x) = x^2 + 4x + 4 \quad \Leftrightarrow a(x + p)^2 + q = ax^2 + 2apx + ap^2 + q$
 $\rightarrow a = 1$
 $\rightarrow 2ap = 4 \rightarrow p = \frac{4}{2a} = 2$
 $\rightarrow ap^2 + q = 4 \rightarrow 4 + q = 4 \rightarrow q = 0$
 $\rightarrow f(x) = (x + 2)^2$
dal : (-2 ; 0)

b $g(x) = 2x^2 + 4x + 4 \quad \Leftrightarrow a(x + p)^2 + q = ax^2 + 2apx + ap^2 + q$
 $\rightarrow a = 2$
 $\rightarrow 2ap = 4 \rightarrow p = \frac{4}{2a} = 1$
 $\rightarrow ap^2 + q = 4 \rightarrow 2 + q = 4 \rightarrow q = 2$
 $\rightarrow g(x) = 2(x + 1)^2 + 2$
dal : (-1 ; 2)
Als $x = -1$ dan $g(-1) = 2$
Voor alle andere waarden van x geldt : $g(x) > 2$

c $h(x) = -2x^2 - 4x - 4 \quad \Leftrightarrow a(x + p)^2 + q = ax^2 + 2apx + ap^2 + q$
 $\rightarrow a = -2$
 $\rightarrow 2ap = -4 \rightarrow p = \frac{-4}{2a} = 1$
 $\rightarrow ap^2 + q = -4 \rightarrow -2 + q = -4 \rightarrow q = -2$
 $\rightarrow h(x) = -2(x + 1)^2 - 2$
top : (-1 ; -2)
Als $x = -1$ dan $h(-1) = -2$
Voor alle andere waarden van x geldt : $h(x) < -2$

d $k(x) = 3x^2 + 6x \quad \Leftrightarrow a(x + p)^2 + q = ax^2 + 2apx + ap^2 + q$
 $\rightarrow a = 3$
 $\rightarrow 2ap = 6 \rightarrow p = \frac{6}{2a} = 1$
 $\rightarrow ap^2 + q = 0 \rightarrow 3 + q = 0 \rightarrow q = -3$
 $\rightarrow k(x) = 3(x + 1)^2 - 3$
dal : (-1 ; -3)

e $y = 2x^2 + 4x + 2 \Leftrightarrow a(x+p)^2 + q = ax^2 + 2apx + ap^2 + q$
 $\rightarrow a = 2$
 $\rightarrow 2ap = 4 \rightarrow p = \frac{4}{2a} = 1$
 $\rightarrow ap^2 + q = 4 \rightarrow 2 + q = 4 \rightarrow q = 2$
 $\rightarrow y = 2(x+1)^2 + 2$
dal : (-1; 2)

f $y = -x^2 - 2x - 2 \Leftrightarrow a(x+p)^2 + q = ax^2 + 2apx + ap^2 + q$
 $\rightarrow a = -1$
 $\rightarrow 2ap = -2 \rightarrow p = \frac{-2}{2a} = 1$
 $\rightarrow ap^2 + q = 4 \rightarrow -1 + q = 4 \rightarrow q = 5$
 $\rightarrow f(x) = -(x+1)^2 + 5$
top : (-1; 5)

Opgave 2.6

Gebruik van de abc-formule.

a $f(x) = 2x^2 - 8x + 4$
 $a = 2 ; b = -8 ; c = 4$
 $b^2 - 4ac = 64 - 4 \times 2 \times 4 = 32$ dus 2 oplossingen
 $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{32}}{4}$
 $x_1 = \frac{8 - 4\sqrt{2}}{4} = 2 - \sqrt{2}$ en $x_2 = \frac{8 + 4\sqrt{2}}{4} = 2 + \sqrt{2}$
dal : $x = -\frac{b}{2a} = 2 \rightarrow f(2) = 2 \times 2^2 - 8 \times 2 + 4 = -4$
 \rightarrow *dal* : (2; -4)

b $f(x) = -x^2 - x + 9$
 $a = -1 ; b = -1 ; c = 9$
 $b^2 - 4ac = 1 - 4 \times -1 \times 9 = 37$ dus 2 oplossingen
 $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{37}}{-2}$
 $x_1 = \frac{1 - \sqrt{37}}{-2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{37}$ en $x_2 = \frac{1 + \sqrt{37}}{-2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{37}$
top : $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2} \rightarrow f(-\frac{1}{2}) = -(\frac{1}{2})^2 - (-\frac{1}{2}) + 9 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 9 = 9\frac{1}{4}$
 \rightarrow *top* : $(-\frac{1}{2}; 9\frac{1}{4})$

c

$$f(x) = 2x^2 - 5x + 5$$

$$a = 2; b = -5; c = 5$$

$$b^2 - 4ac = 25 - 4 \times 2 \times 5 = -15 \quad \text{dus geen oplossingen}$$

$$\text{dal} : x = \frac{-b}{2a} \rightarrow x = \frac{5}{4} \rightarrow f\left(\frac{5}{4}\right) = 2 \times \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 5 \times \frac{5}{4} + 5$$

$$\rightarrow f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{25}{8} - \frac{50}{8} + \frac{40}{8} = \frac{25 - 50 + 40}{8} = \frac{15}{8}$$

$$\rightarrow \text{dal} : \left(\frac{5}{4}; \frac{15}{8}\right)$$

d

$$f(x) = 3x^2 + 3$$

$$a = 3; b = 0; c = 3$$

$$b^2 - 4ac = 0 - 4 \times 3 \times 3 = -36 \quad \text{dus geen oplossingen}$$

$$\text{dal} : x = \frac{-b}{2a} \rightarrow x = \frac{0}{4} \rightarrow f(0) = 3$$

$$\rightarrow \text{dal} : (0; 3)$$

e

$$m(x) = -f(x) \rightarrow m(x) = -(2x^2 - 8x + 4) = -2x^2 + 8x - 4$$

$$a = -2; b = 8; c = -4$$

$$b^2 - 4ac = 64 - 4 \times -2 \times -4 = 32 \quad \text{dus 2 oplossingen}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{32}}{-4}$$

$$x_1 = \frac{-8 + 4\sqrt{2}}{-4} = 2 - \sqrt{2} \quad \text{en} \quad x_2 = \frac{-8 - 4\sqrt{2}}{-4} = 2 + \sqrt{2}$$

$$\text{top} : x = \frac{-b}{2a} = 2 \rightarrow f(2) = -2 \times 2^2 + 8 \times 2 - 4 = 4$$

$$\rightarrow \text{top} : (2; 4)$$

De y -waarde van $m(x)$ is overal even groot dan de y -waarde van $f(x)$, maar dan gespiegeld t.o.v. de x -as.

f

$$n(x) = 2f(x) \rightarrow m(x) = 2 \cdot (2x^2 - 8x + 4) = 4x^2 - 16x + 8$$

$$a = 4; b = -16; c = 8$$

$$b^2 - 4ac = 256 - 4 \times 4 \times 8 = 128 \quad \text{dus 2 oplossingen}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow x_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{128}}{8}$$

$$x_1 = \frac{16 - 8\sqrt{2}}{8} = 2 - \sqrt{2} \quad \text{en} \quad x_2 = \frac{16 + 8\sqrt{2}}{8} = 2 + \sqrt{2}$$

$$\text{dal} : x = \frac{-b}{2a} = 2 \rightarrow f(2) = 4 \times 2^2 - 16 \times 2 + 8 = 8 \quad \text{dal} : (2; 8)$$

De y -waarde van $n(x)$ is overal $2 \times$ zo groot dan de y -waarde van $f(x)$.

Opgave 2.7**Snijpunten bepalen met de x -as.**

a

$$f(x) = x^2 - 4$$
$$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x_{1,2} = \pm 2$$

coördinaten snijpunten : $(-2; 0)$ en $(2; 0)$

coördinaten dal : $(0; -4)$

b

$$f(x) = -2x^2 + 4x - 2$$
$$-2x^2 + 4x - 2 = 0 \rightarrow -x^2 + 2x - 1 = 0 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$
$$\rightarrow (x-1)^2 = 0$$

coördinaten raakpunt : $(1; 0)$

coördinaten top : $(1; 0)$

c

$$f(x) = -2x^2 + 4$$
$$-2x^2 + 4 = 0 \rightarrow x^2 - 2 = 0$$
$$\rightarrow (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0 \quad \text{type : } a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

coördinaten snijpunten : $(\sqrt{2}; 0)$ en $(-\sqrt{2}; 0)$

coördinaten top : $(0; -2)$

d

$$f(x) = 3(x-4)^2$$
$$3(x-4)^2 = 0 \rightarrow (x-4)^2 = 0$$
$$\rightarrow x = 4$$

coördinaten raakpunt : $(4; 0)$

coördinaten dal : $(4; 0)$

e

$$f(x) = 3 - x^2$$
$$3 - x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 3 \rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$$

coördinaten snijpunten : $(-\sqrt{3}; 0)$ en $(\sqrt{3}; 0)$

coördinaten top : $(0; 3)$

f

$$f(x) = 4(x+2)^2$$
$$(x+2)^2 = 0 \rightarrow x = -2$$

coördinaten raakpunt : $(-2; 0)$

coördinaten dal : $(-2; 0)$

g

$$k(x) = -2x^2 - 4$$
$$-2x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = -2$$

geen snijpunten met x -as

coördinaten dal : $(0; -4)$

Top ligt onder de x -as, dus geen snijpunten!

$$\text{h } \textit{rood} : f(x) = 4(x-1)(x+1) = 4(x^2 - 1) = 4x^2 - 4$$

$$\textit{blauw} : g(x) = -4(x-1)(x+1) = -4x^2 + 4$$

Opgave 2.8

Ontbind de volgende functies in factoren.

$$\text{a } f(x) = 2x^2 - 7 = 2\left(x^2 - \frac{7}{2}\right) = 2\left(x + \sqrt{\frac{7}{2}}\right)\left(x - \sqrt{\frac{7}{2}}\right)$$

$$\text{b } f(x) = 2x^2 - 7x = 2x \cdot \left(x - \frac{7}{2}\right)$$

$$\text{c } f(x) = x^2 + 4$$

kan niet in factoren ontbonden worden

$$\text{d } f(x) = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 = (x-3)(x-3)$$

$$\text{e } f(x) = 2x^2 + 12x + 18 = 2(x^2 + 6x + 9) = 2(x+3)^2$$

$$\rightarrow 2(x+3)(x+3)$$

$$\text{f } f(x) = 9x^2 - 16 = (3x-4)(3x+4)$$

$$\text{g } f(x) = -2x^2 + 2x + 12 = -2(x^2 - x - 6) = -2(x-3)(x+2)$$

$$\text{h } f(x) = x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4)$$

Opgave 2.9

Verschuiven van grafieken.

$$\text{a } f(x) = a(x+1)(x-3) \rightarrow x(\text{dal}) = \frac{-1+3}{2} = 1$$

$$\text{dal} : (1; -3)$$

$$-3 = a \cdot (2) \cdot (-2) \rightarrow a = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

$$f(x) = \frac{3}{4} \cdot (x+1)(x-3)$$

$$\text{b } f(x) = \frac{3}{4} \cdot (x-2+1)(x-2-3) = \frac{3}{4} \cdot (x-1)(x-5)$$

$$\text{c } f(x) = \frac{3}{4} \cdot (x+3+1)(x+3-3) = \frac{3}{4} \cdot (x+4)(x)$$

$$\rightarrow f(x) = \frac{3}{4}x \cdot (x+4)$$

$$\text{d } f(x) = \frac{3}{4} \cdot (x+1)(x-3) - 2$$

$$\text{e } f(x) = \frac{3}{4} \cdot (x+2+1)(x+2-3) + 1 = \frac{3}{4} \cdot (x+3)(x-1) + 1$$

$$f(x) = \frac{3}{4} \cdot (x-1)(x-5) = \frac{3}{4} \cdot (x^2 - 6x + 5) = \frac{3}{4} \cdot x^2 - 4\frac{1}{2} \cdot x + 3\frac{3}{4}$$

$$f(x) = \frac{3}{4} x \cdot (x+4) = \frac{3}{4} x^2 + 3x$$

$$f(x) = \frac{3}{4} \cdot (x+1)(x-3) - 2 = \frac{3}{4} (x^2 - 2x - 3) = \frac{3}{4} x^2 - \frac{3}{2} x - 2\frac{1}{4}$$

Opgave 2.10

Een derdegraads functie kan 3 snijpunten hebben.

a

$$f(x) = 2(x+2)(x-1)(x-3)$$

$$\rightarrow f(x) = 2(x+2)(x^2 - 4x + 3) = 2(x^3 - 4x^2 + 3x + 2x^2 - 8x + 6)$$

$$\rightarrow 2x^3 - 4x^2 - 10x + 12$$

Teken met de applet [1.3](#) eerst de grafiek van het voorschrift met haakjes en vervolgens van het voorschrift zonder haakjes. Als de tweede grafiek over de eerste getekend wordt is de uitwerking correct. Op deze manier kun je de grafieken-applet gebruiken als controlemiddel.

b

$$f(x) = 2(x+2)(x-1)(x-3)$$

$$f(0) = 2 \cdot (2)(-1)(-3) = 12 \quad \text{of} \quad f(0) = 2 \cdot 0 - 4 \cdot 0 - 10 \cdot 0 + 12 = 12$$

c

$$f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 10x + 12 + 8 = 2x^3 - 4x^2 - 10x + 20$$

De grafiek moet 8 schaaldelen omhoog verplaatst worden.

d

$$f(x) = 2(x-1+2)(x-1-1)(x-1-3)$$

$$\rightarrow f(x) = 2 \cdot (x+1)(x-2)(x-4)$$

De grafiek is 1 schaaldeel naar rechts verschoven.

Opgave 2.11

Grafieken vergelijken.

a

$$x^2 + 6x - 2 > -2$$

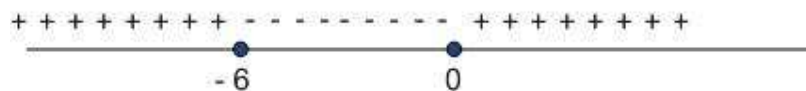
$$\rightarrow x^2 + 6x - 2 = -2 \rightarrow x^2 + 6x = 0$$

$$\rightarrow x(x+6) = 0$$

dalparabool met snijpunten voor $x = 0$ en $x = -6$

$$x^2 + 6x - 2 > -2 \rightarrow x^2 + 6x > 0$$

$$x < -6 \quad \text{of} \quad x > 0$$



b

$$x^2 - 4x - 2 > 2x - 3$$

$$\rightarrow x^2 - 4x - 2 = 2x - 3$$

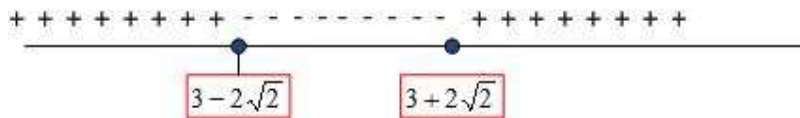
$$\rightarrow x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4}}{2} \rightarrow x_{1,2} = \frac{6 \pm 4\sqrt{2}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

dalparabool met snijpunten voor $x = 3 - 2\sqrt{2}$ en $x = 3 + 2\sqrt{2}$

$$x^2 - 6x + 1 > 0$$

als $x < (3 - 2\sqrt{2})$ of $x > (3 + 2\sqrt{2})$
of afgerond : $x < 0,172$ of $x > 5,83$



c

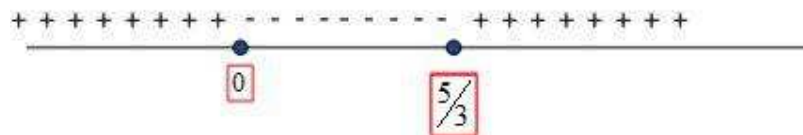
$$2x^2 - 5x - 4 > -x^2 - 4$$

$$\rightarrow 3x^2 - 5x = 0 \rightarrow 3x \cdot (x - \frac{5}{3}) = 0$$

dalparabool met snijpunten voor $x = 0$ en $x = \frac{5}{3}$

$$\rightarrow 3x^2 - 5x > 0$$

$x < 0$ of $x > \frac{5}{3}$



d

$$-3x^2 - 3x + 2 > 3x^2 + 3x - 2$$

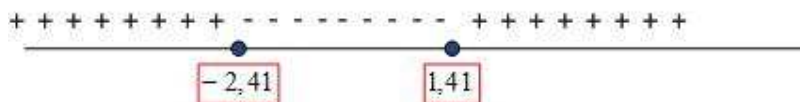
$$\rightarrow -6x^2 - 6x + 4 > 0 \rightarrow x^2 + x - \frac{2}{3} < 0 \quad (\text{delen door getal } < 0)$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \frac{8}{3}}}{2} \rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{\frac{11}{3}}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{3}}$$

dalparabool met snijpunten voor $x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{3}}$ en $x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{3}}$

$$x^2 + x - \frac{2}{3} < 0$$

als $(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{3}}) < x < -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{3}}$
of afgerond : $-2,41 < x < 1,41$



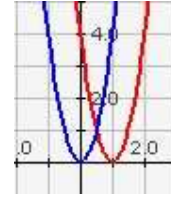
e

$$4x^2 - 8x + 4 > 4(x+1)^2 - 8(x+1) + 4$$

$$4x^2 - 8x + 4 = 4x^2 + 8x + 4 - 8x - 8 + 4$$

$$\rightarrow -8x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$-8x + 4 > 0 \rightarrow x < \frac{1}{2} \quad (\text{delen door getal } < 0)$$



Als $x < \frac{1}{2}$ dan rood(rechts) > blauw(links)

f

$$-2x + 1 > (-2x + 1)(x - 3)$$

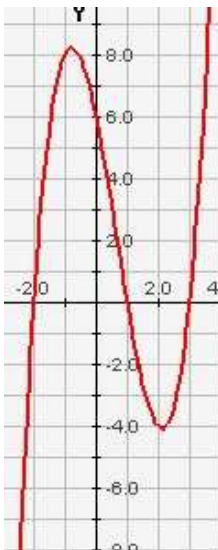
$$\rightarrow -2x + 1 > -2x^2 + 7x - 3 \rightarrow -2x^2 + 9x - 4 < 0 \rightarrow 2x^2 - 9x + 4 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{4} \rightarrow x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{9}{4} \pm \frac{7}{4}$$

dalparabool met snijpunten voor $x_1 = \frac{1}{2}$ en $x_2 = 4$

$$2x^2 - 9x + 4 > 0$$

als $x < \frac{1}{2}$ of $x > 4$



g

$$(x-1)(x+2)(x-3) > 0$$

$$-2 < x < 1 \quad \text{of} \quad x > 3$$

h

$$x^2 - 4x - 2 > 2 \cdot (x^2 - 4x - 2)$$

$$\rightarrow x^2 - 4x - 2 > 2x^2 - 8x - 4$$

$$\rightarrow -x^2 + 4x + 2 > 0 \rightarrow x^2 - 4x - 2 < 0$$

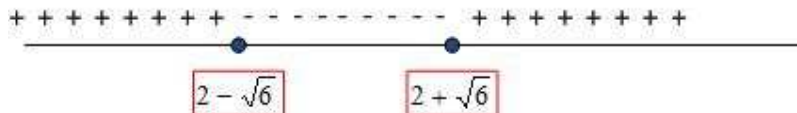
$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 8}}{2} \rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{6}}{2} = 2 \pm \sqrt{6}$$

dalparabool met snijpunten voor $x_1 = 2 - \sqrt{6}$ en $x_2 = 2 + \sqrt{6}$

$$x^2 - 4x - 2 < 0$$

als $(2 - \sqrt{6}) < x < (2 + \sqrt{6})$

of afgerond : $-0,45 < x < 4,45$



Opgave 2.12

Snijpunten bepalen 1.

a

$$2x - 6 = -2x^2 + 12x - 14$$

$$\rightarrow 2x^2 - 10x + 8 = 0 \rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\rightarrow (x-4)(x-1) = 0 \rightarrow x_1 = 1 \text{ en } x_2 = 4$$

$$\rightarrow y_1 = -4 \text{ en } y_2 = 2$$

snijpunten : (1 ; -4) en (4 ; 2)

b

$$2x - 3 = \frac{1}{3}x^2$$

$$\rightarrow \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 = 0 \rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$\rightarrow (x - 3)^2 = 0 \rightarrow x = 3$$

$$\rightarrow y = (4 - 3)^2 = 1$$

raakpunt : (3 ; 1)

c

$$-\frac{1}{2}x - 2 = \frac{1}{4}x^2 + x - 2\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \rightarrow x^2 + 6x - 2 = 0$$

$$\rightarrow x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 8}}{2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{11}}{2}$$

$$\rightarrow x_1 = -3 - \sqrt{11} \quad \text{en} \quad x_2 = -3 + \sqrt{11}$$

$$\rightarrow y_1 = -\frac{1}{2}(-3 - \sqrt{11}) - 2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{11}$$

$$y_2 = -\frac{1}{2}(-3 + \sqrt{11}) - 2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{11}$$

snijpunten : afgerond : (-6,32 ; 1,16) en (0,32 ; -2,16)

d

$$2x^2 = -x^2 + 4x - 1$$

$$\rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6}$$

$$\rightarrow x_1 = \frac{1}{3} \quad \text{en} \quad x_2 = 1$$

$$\rightarrow y_1 = \frac{2}{9} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{11} \quad \text{en} \quad y_2 = 2$$

snijpunten : afgerond : ($\frac{1}{3}$; $\frac{2}{9}$) en (1 ; 2)

Opgave 2.13

Snijpunten bepalen 2.

a

$$x^2 + 1 = ax \rightarrow x^2 - ax + 1 = 0$$

$$\rightarrow D = (-a)^2 - 4 = a^2 - 4$$

raakpunt als $D = 0 \rightarrow a^2 = 4 \rightarrow a = \pm 2$

geen snijpunten als $D < 0 \rightarrow a^2 - 4 < 0 \rightarrow a^2 < 4$

$$\rightarrow -2 < a < 2$$

b $x^2 + a = x \rightarrow x^2 - x + a = 0$
 $\rightarrow D = (-1)^2 - 4a = 1 - 4a$
raakpunt als $D = 0 \rightarrow 4a = 1 \rightarrow a = \frac{1}{4}$
geen snijpunten als $D < 0 \rightarrow 1 - 4a < 0$
 $\rightarrow a > \frac{1}{4}$

c $ax^2 + 1 = ax \rightarrow ax^2 - ax + 1 = 0$
 $\rightarrow D = (-a)^2 + 4a = a^2 + 4a = a(a + 4)$
raakpunt als $D = 0 \rightarrow a = 0$ of $a = -4$
geen snijpunten als $D < 0 \rightarrow a(a + 4) < 0$
 $\rightarrow -4 < a < 0$

Opgave 2.14

Stel het functievoorschrift op voor de grafiek.

a $2 = a + b + c$
 $\underline{6 = a - b + c} \quad (-)$
 $-4 = 0 + 2b + 0 \rightarrow b = -2$

$6 = a - b + c$
 $\underline{3 = 4a + 2b + c} \quad (-)$
 $3 = -3a - 3b \rightarrow 3 = -3a - 3 \times -2 \rightarrow a = \frac{-3}{-3} = 1$

$c = 2 - a - b = 2 - 1 - (-2) = 3$
 $f(x) = x^2 - 2x + 3$

b

$$-4 = 4a - 2b + c$$

$$\underline{-1 = a + b + c} \quad (-)$$

$$-3 = 3a - 3b$$

$$-1 = a + b + c$$

$$\underline{-8 = 4a + 2b + c} \quad (-)$$

$$7 = -3a - b$$

$$-3 = 3a - 3b$$

$$\underline{7 = -3a - b} \quad (+)$$

$$4 = 0 - 4b \rightarrow b = -1$$

$$-3 = 3a - 3 \times -1 \rightarrow a = \frac{-6}{3} = -2$$

$$c = -1 - a - b = -1 + 2 + 1 = 2$$

$$f(x) = -2x^2 - x + 2$$

c

$$2 = c$$

$$\underline{4 = 4a + 2b + c} \quad (-)$$

$$-2 = -4a - 2b$$

$$4 = 4a + 2b + c$$

$$\underline{2 = 16a + 4b + c} \quad (-)$$

$$2 = -12a - 2b$$

$$-2 = -4a - 2b$$

$$\underline{2 = -12a - 2b} \quad (-)$$

$$-4 = 8a + 0 \rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$-2 = -4 \times -\frac{1}{2} - 2b \rightarrow b = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$$

Opgave 2.15**Berekeningen aan de remweg.**

a $v = -7,84t + 30$

v - t -diagram v vertikaal in m/s

b
$$\text{hellingsgetal} = \frac{-30 \frac{m}{s}}{-3,8 s} = 7,9 \frac{m}{s^2}$$

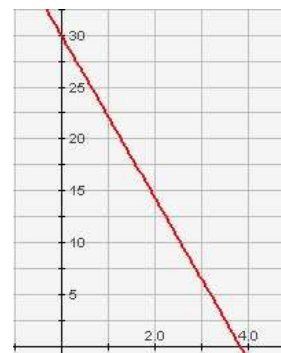
Dit is de remvertraging, de afname van de snelheid per seconde

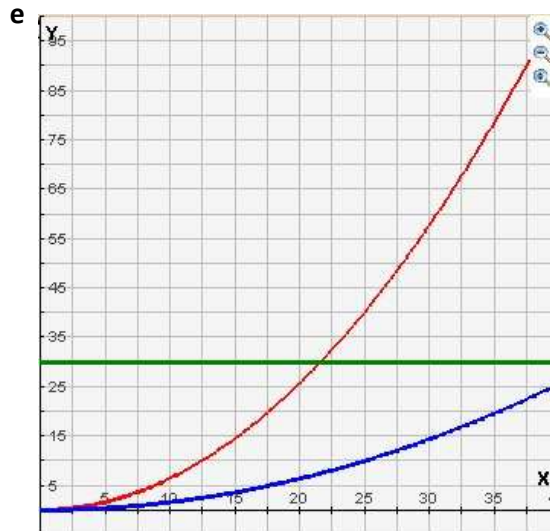
c $v = -7,84t + 30$

$$v = 0 \rightarrow 7,84t = 30 \rightarrow t = \frac{30}{7,84} = 3,83 s$$

d
$$s_1 = \frac{v_0^2}{2 \times 0,8 \times 9,8} = 0,0638 \cdot v_0^2$$

$$s_2 = \frac{v_0^2}{2 \times 0,2 \times 9,8} = 0,0159 \cdot v_0^2$$





Vertikaal is de remweg uitgezet tegen horizontaal de snelheid.

De rode grafiek hoort bij $f = 0,8$ (droog)

De blauwe grafiek hoort bij $f = 0,2$ (sneeuw)

f

De horizontale lijn in de grafiek hoort bij de stilstaande auto.

Conclusie: Als de snelheid bij het remmen op een droog wegdek groter is dan 22 m/s, zal een botsing plaats hebben.

g $s(t) = -0,98t^2 + 30t$

h $a = -0,98$; $b = 30$; $c = 0$



Vertikaal is s uitgezet in meter en horizontaal t in seconden.

j

$$t(\text{top}) = \frac{-b}{2a} = \frac{-30}{2 \times -0,98} = 15,3 \text{ s}$$

$$s(\text{top}) = -0,98 \times (15,3)^2 + 30 \times 15,3 = 230 \text{ m}$$

top : (15,3 ; 230)

De top geeft aan hoe groot de remtijd en de remweg is op het einde van de remweg.

k $v(t) = -1,96t + 30$



Vertikaal is de snelheid uitgezet in m/s en horizontaal de tijd in s.

m $v(t) = 0 \rightarrow -1,96t + 30 = 0 \rightarrow t = \frac{30}{1,96} = 15,3 \text{ s}$
Klopt met antwoord bij vraag j

n $s(t) = -0,98 \cdot (t - 2)^2 + 30 \cdot (t - 2)$
Op $t = 2$ is $(t - 2) = 0$

Opgave 2.16

Berekeningen aan een kogelbaan.

a

$x(0)$ is de begin-afstand tot het referentiepunt in horizontale richting
 $y(0)$ is de begin-afstand tot het referentiepunt in verticale richting

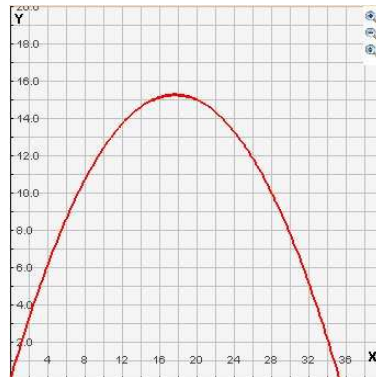
b

$$v_0 (\text{vertikaal}) = 20 \cdot \sin(60^\circ) = 17,3 \text{ m/s}$$

c

$$\begin{aligned} x(t) &= 10 \cdot t \\ y(t) &= -4,9 \cdot t^2 + 17,3 \cdot t \\ y &= -4,9 \cdot \left(\frac{x}{10}\right)^2 + 17,3 \cdot \frac{x}{10} \\ y &= -0,049 \cdot x^2 + 1,73x \end{aligned}$$

Vertikaal is de hoogte y in m,
horizontaal de afstand in
horizontale richting in m
uitgezet.



d

$$y = -0,049 \cdot x^2 + 1,73x = 0$$

$$y = x(-0,049x + 1,73)$$

$$\rightarrow x_1 = 0 \text{ m en } x_2 = \frac{1,73}{0,049} = 35,3 \text{ m}$$

$$x(\text{top}) = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{35,3}{2} = 17,65 \text{ m} \quad \text{of} \quad x(\text{top}) = \frac{-b}{2a} = \frac{-1,73}{2 \times -0,049} = 17,65 \text{ m}$$

$$y(\text{top}) = -0,049 \times (17,65)^2 + 1,73 \times 17,65 = 15,3 \text{ m}$$

$$\text{top} : (17,65 ; 15,3) \text{ m}$$

e

$$\text{op max hoogte} : v_y = 0$$

$$\rightarrow -9,8t + 17,3 = 0 \rightarrow t = \frac{-17,3}{-9,8} = 1,765 \text{ s}$$

f

$$y(t) = -4,9 \cdot t^2 + 17,3 \cdot t$$

$$\rightarrow y(1,765) = -4,9 \times (1,765)^2 + 17,3 \times 1,765 = 15,3 \text{ m}$$

$$x(t) = 10 \cdot t$$

$$\rightarrow x(1,765) = 17,65 \text{ m}$$

Deze waarden kloppen met het antwoord van vraag d)

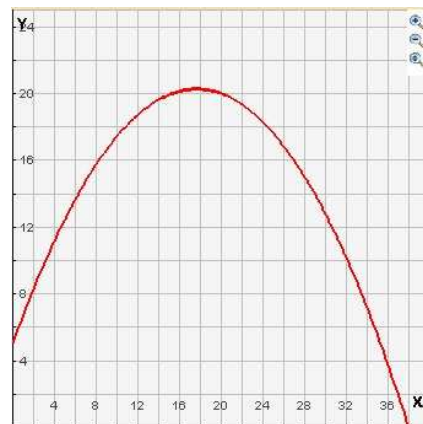
g

$$x(t) = 10 \cdot t$$

$$y(t) = -4,9 \cdot t^2 + 17,3 \cdot t + 5$$

$$y = -4,9 \cdot \left(\frac{x}{10}\right)^2 + 17,3 \cdot \frac{x}{10} + 5$$

$$y = -0,049 \cdot x^2 + 1,73x + 5$$



h

$$y = -0,049 \cdot x^2 + 1,73x + 5 = 0$$

$$\rightarrow x_{1,2} = \frac{-1,73 \pm \sqrt{1,73^2 - 4 \times -0,049 \times 5}}{2 \times -0,049}$$

$$\rightarrow x_{1,2} = \frac{-1,73 \pm 1,99}{-0,098} \rightarrow x_1 = \frac{0,26}{-0,098} = -2,65 \text{ m}$$

$$\rightarrow x_2 = \frac{-3,72}{-0,098} = 38,0 \text{ m}$$

x_1 en x_2 zijn de plaatsen waar de hoogte nul is.

x_1 is niet van toepassing omdat de kogel wordt weggeschoten op een hoogte van 5 meter.

Opgave 2.17**Berekeningen aan valbeweging.****a**

$$y(t) = -4,9 \cdot t^2 - 10 \cdot t + 20$$

$$\rightarrow y(0) = 20 \text{ m}$$

$$v = -9,8 \cdot t - 10 \rightarrow v(0) = -10 \text{ m/s}$$

b

$$-4,9 \cdot t^2 - 10 \cdot t + 20 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \times -4,9 \times 20}}{-9,8} = \frac{10 \pm 22,2}{-9,8}$$

$$t_1 = \frac{32,2}{-9,8} = -3,29 \text{ s en } t_2 = \frac{-12,2}{-9,8} = 1,24 \text{ s}$$

$$t(\text{top}) = \frac{-3,29 + 1,24}{2} = -1,03 \text{ s}$$

c

$$B: y(t) = -4,9 \cdot (t-1)^2 - 10 \cdot (t-1) + 20$$

Opgave 2.18**Optimalisering tweedegraads functie.**

Je hebt een koord met een lengte van 10 m en moet daarmee een zo groot mogelijk rechthoekig oppervlak afzetten.



$$\text{a } B: l + x = 5 \rightarrow l = 5 - x$$

$$\rightarrow A = l \cdot x = (5 - x) \cdot x = 5x - x^2$$

$$\text{b } A = 5x - x^2 = x \cdot (5 - x)$$

$$x_1 = 0 \text{ en } x_2 = 5$$

De waardes kloppen, want als $x = 0$ of als $x = 5$ dan $A = 0$

c De grafiek is een bergparabool met een maximum.

$$A = 5x - x^2 = x \cdot (5 - x)$$

$$x_1 = 0 \text{ en } x_2 = 5$$

$$x(\text{top}) = \frac{x_1 + x_2}{2} = 2,5$$

De oppervlakte is maximaal bij een vierkant van $2,5 \times 2,5$.