Uitwerkingen hoofdstuk 5

5. Exponentiële en logaritmische functies.

Opgave 5.1 **Basisberekeningen met logaritmen**

a

$$4^x = 8 \rightarrow x = {}^4\log(8)$$
$$afgerond: x == \frac{\log(8)}{\log(4)} = \frac{0{,}903}{0{,}602} = 1{,}50$$

b

$$1{,}4^a = 10 \rightarrow exact: a = {}^{1,4}\log(10)$$
$$afgerond: a == \frac{\log(10)}{\log(1{,}4)} = \frac{1}{0{,}146} = 6{,}84$$

c

$$0{,}0001 = 10^{-4}$$

d

$$2^x = 1000 \rightarrow x = {}^2\log(1000)$$
$$exact: 2^{{}^2\log(1000)} = 1000$$
$$afgerond:$$
$${}^2\log(1000) = \frac{\log(1000)}{\log(2)} = \frac{3}{0{,}301} = 9{,}97 \rightarrow 2^{9,97} = 1000$$

$\log(2) = 0{,}301$; $\log(3) = 0{,}477$

e

$$\log(16) = \log(2^4) = 4\log(2) = 4 \times 0{,}301 = 1{,}204$$
$$\log(0{,}03) = \log(3) - \log(100) = 0{,}477 - 2 = -1{,}523$$
$$\log(6 \cdot 10^{-6}) = \log(6) + \log(10^{-6}) = \log(2) + \log(3) - 6 = -5{,}222$$

f

$$\log(3^5) = 5\log(3) = 5 \times 0{,}477 = 2{,}385$$
$$\log(2^4 \cdot 3^{-4}) = 4\log(2) - 4\log(3) = 4 \times 0{,}301 - 4 \times -0{,}477 = -0{,}704$$
$$\log(12 \cdot 10^5) = \log(12) + \log(10^5) = 2\log(2) + \log(3) + 5 = 6{,}079$$

g

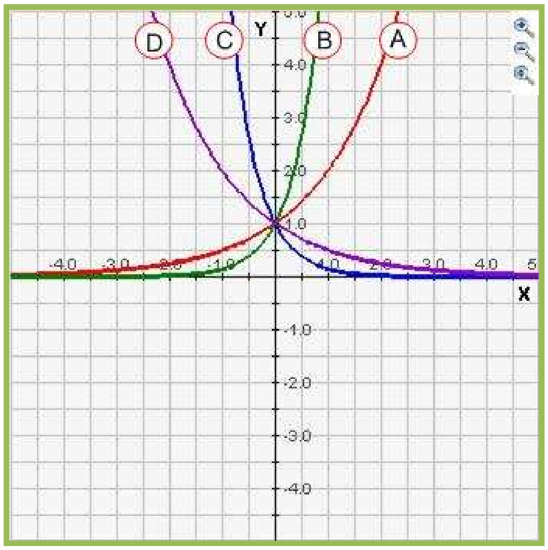
$${}^2\log(3) = {}^4\log(9) = {}^{\sqrt{2}}\log(\sqrt{3}) = {}^8\log(27)$$
$${}^4\log(9) = \frac{\log(9)}{\log(4)} = \frac{\log(3^2)}{\log(2^2)} = \frac{2\log(3)}{2\log(2)} = \frac{\log(3)}{\log(2)} = {}^2\log(3)$$
$${}^{\sqrt{2}}\log(\sqrt{3}) = \frac{\log(3^{\frac{1}{2}})}{\log(2^{\frac{1}{2}})} = \frac{\frac{1}{2}\log(3)}{\frac{1}{2}\log(2)} = \frac{\log(3)}{\log(2)} = {}^2\log(3)$$
$${}^8\log(27) = \frac{\log(27)}{\log(8)} = \frac{\log(3^3)}{\log(2^3)} = \frac{3\log(3)}{3\log(2)} = \frac{\log(3)}{\log(2)} = {}^2\log(3)$$

h $4^{{}^4\log(3)} = 3$

i $2^{\,^{2}\log(5)} = 5$

Opgave 5.2 **Onderzoek naar de betekenis van de exponent.**

In onderstaande figuur zijn de grafieken getekend van
$f(x) = 2^x$; $g(x) = 7^x$; $h(x) = (1/2)^x$; $k(x) = (1/7)^x$



a
$$\boxed{\begin{array}{l} h(x) = (\frac{1}{2})^x = (2^{-1})^x = 2^{-x} \rightarrow h(2) = 2^{-2} \text{ en ook } h(-x) = 2^{-(-x)} = 2^x \\ \rightarrow h(-x) = f(x) \quad ofwel\ h(-1) = f(1) \end{array}}$$

De grafiek van f(x) ***(A)*** *en de grafiek van h(x)* ***(D)*** *zijn gespiegeld t.o.v. de y-as.*

b $f(x)$: **A** $\quad f(1) = 2$

$g(x)$: **B** $\quad g(1) = 7$

$h(x)$: **D** $\quad h(1) = \frac{1}{2}$

$k(x)$: **C** $\quad k(1) = \frac{1}{7}$

c $h(x) > k(x) \rightarrow (\frac{1}{2})^x > (\frac{1}{7})^x \quad \text{als } x > 0$

d $f(x) = 3$

$2^x = 3 \rightarrow x = {}^{2}\log(3)\ exact \qquad x = \frac{{}^{10}\log(3)}{{}^{10}\log(2)} = 1{,}58\ afgerond$

x is de exponent die bij het grondtal 2 de waarde 3 oplevert

wiskundig : $x = {}^{2}\log(3) \quad of \quad 2^{\,^{2}\log(3)} = 3$

e
$$\frac{g(x)}{f(x)} = 2 \rightarrow \frac{7^x}{2^x} = 2 \rightarrow 3{,}5^x = 2$$
$$x = {}^{3,5}\log(2)\ exact \quad x = \frac{\log(2)}{\log(3{,}5)} = 0{,}55\ afgerond$$

f
$$\frac{1}{k(x)} = \frac{1}{(1/7)^x} = \frac{1}{7^{-x}} = 7^x$$

Opgave 5.3 Herleiden van de exponent.

a $f(x) = 3^{x+1} = 3^x \cdot 3^1 = 3 \cdot 3^x$

b $g(x) = 2^{x-2} = 2^x \cdot 2^{-2} = \frac{1}{4} \cdot 2^x$

c $g(x) = 4^{2x} = (4^2)^x = 16^x$

d $k(x) = 3^{2x+4} = (3)^{2x} \cdot 3^4 = (3^2)^x . 3^4 = 9^x \cdot 81 = 81 \cdot 9^x$

e $l(x) = 5^{x-1} = 5^x \cdot 5^{-1} = \frac{1}{5} . 5^x$

f $m(x) = 9^{\frac{1}{2}x} = (9^{\frac{1}{2}})^x = ((3^2)^{\frac{1}{2}})^x = 3^x$

g $n(x) = 6^{-x} = (6^{-1})^x = (\frac{1}{6})^x$

h $p(x) = b^{x+a} = b^a \cdot b^x$

Opgave 5.4 Kapitaalgroei berekenen.

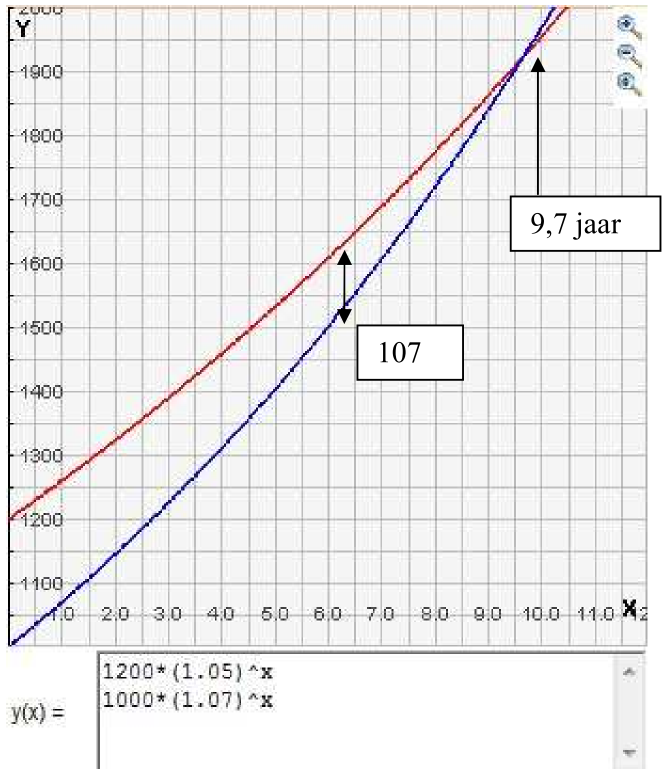
A heeft een kapitaal van 1200 en krijgt 5% rente per jaar.
B heeft een kapitaal van 1000 en krijgt 7% rente per jaar.

a
$$K_A = 1200 \cdot (1{,}05)^x$$
$$K_B = 1000 \cdot (1{,}07)^x$$
$$1200 \cdot (1{,}05)^x = 1000 \cdot (1.07)^x \rightarrow \frac{1200}{1000} = \frac{1{,}07^x}{1{,}05^x}$$
$$\rightarrow 1{,}2 = (\frac{1{,}07}{1{,}05})^x \rightarrow 1{,}019^x = 1{,}2 \rightarrow x = {}^{1,019}\log(1{,}2) = \frac{\log(1{,}2)}{\log(1{,}019)} = 9{,}7$$

Na 9,7 jaar is het kapitaal van A gelijk aan dat van B

b $K_A - K_B = 1200 \cdot (1{,}05)^6 - 1000 \cdot (1{,}07)^6 = 1608 - 1501 = 107$

c



Opgave 5.5 **Afkoelcurve.**

Een heet voorwerp heeft een temperatuurverschil van 60 ^{0}C met de omgeving. De omgeving heeft een temperatuur van 20 ^{0}C.
Het temperatuurverschil (ΔT) met de omgeving koelt af met een halfwaardetijd ($T_{1/2}$) van 10 min. Dat betekent dat ΔT iedere 10 minuten gehalveerd wordt.
Het aantal keer 10 minuten is de variabele *n*.
Dus **ΔT (0) = 40 ^{0}C, ΔT (1) = 20 ^{0}C , ΔT (2) = 10 ^{0}C** enz.

a
$$\boxed{\Delta T(n) = \Delta T(0)\cdot(\frac{1}{2})^n \rightarrow \Delta T(n) = 40\cdot(\frac{1}{2})^n}$$

b
$$\boxed{\Delta T(2) = 40\cdot(\frac{1}{2})^2 \rightarrow \Delta T(2) = 40\times(\frac{1}{4}) = 10\ ^0C}$$

c
$$\Delta T = 10 \rightarrow 10 = 40\times(\frac{1}{2})^n \rightarrow \frac{10}{40} = (\frac{1}{2})^n$$
$$\rightarrow 0{,}25 = 0{,}5^n \rightarrow n = {}^{0,5}\log(0{,}25) = \frac{\log(0{,}25)}{\log(0{,}5)} = 2$$
$$\rightarrow t = 2\times T_{1/2} = 20\,\text{min}$$

d
$$\Delta T(n) = \Delta T(0)\cdot(\frac{1}{2})^n$$
$$n = \frac{t}{T_{1/2}} \rightarrow n = \frac{14}{10} = 1{,}4 \rightarrow \Delta T(1{,}4) = 40\cdot(\frac{1}{2})^{1,4} = 15{,}2\ ^0\text{C}$$
$$\text{afgerond}: \Delta T(1{,}4) = 15\ ^0\text{C}$$

e

$$n=\frac{t}{T_{1/2}}=\frac{t}{600}$$

$$\Delta T(t)=40\cdot(\frac{1}{2})^{\frac{t}{600}}=40\cdot(2^{-1})^{\frac{t}{600}}=40\cdot 2^{-\frac{t}{600}}$$

$$T(t)=T_{omgeving}+\Delta T=20+40\cdot 2^{-\frac{t}{600}}$$

Opgave 5.6 **Herleiden van de exponent.**

Stel het functievoorschrift op dat op bij de volgende waarden hoort:

a

x	0	1	2	3	4
y	1	3	9	27	51

b

x	0	1	2	3	4
y	2	8	32	128	512

c

x	0	1	2	3	4
y	120	60	30	15	7,5

a

$$bij\ \Delta x=1\ is\ \ factor\times 3\qquad y(0)=1$$
$$y=1\cdot 3^x\ =3^x$$

b

$$bij\ \Delta x=1\ is\ \ factor\times 4\qquad y(0)=2$$
$$y=2\cdot 4^x$$

c $\boxed{\begin{array}{l} bij\ \Delta x = 1\ is\ factor \times 0{,}5 \quad y(0) = 120 \\ y = 120 \cdot (0{,}5)^x \end{array}}$

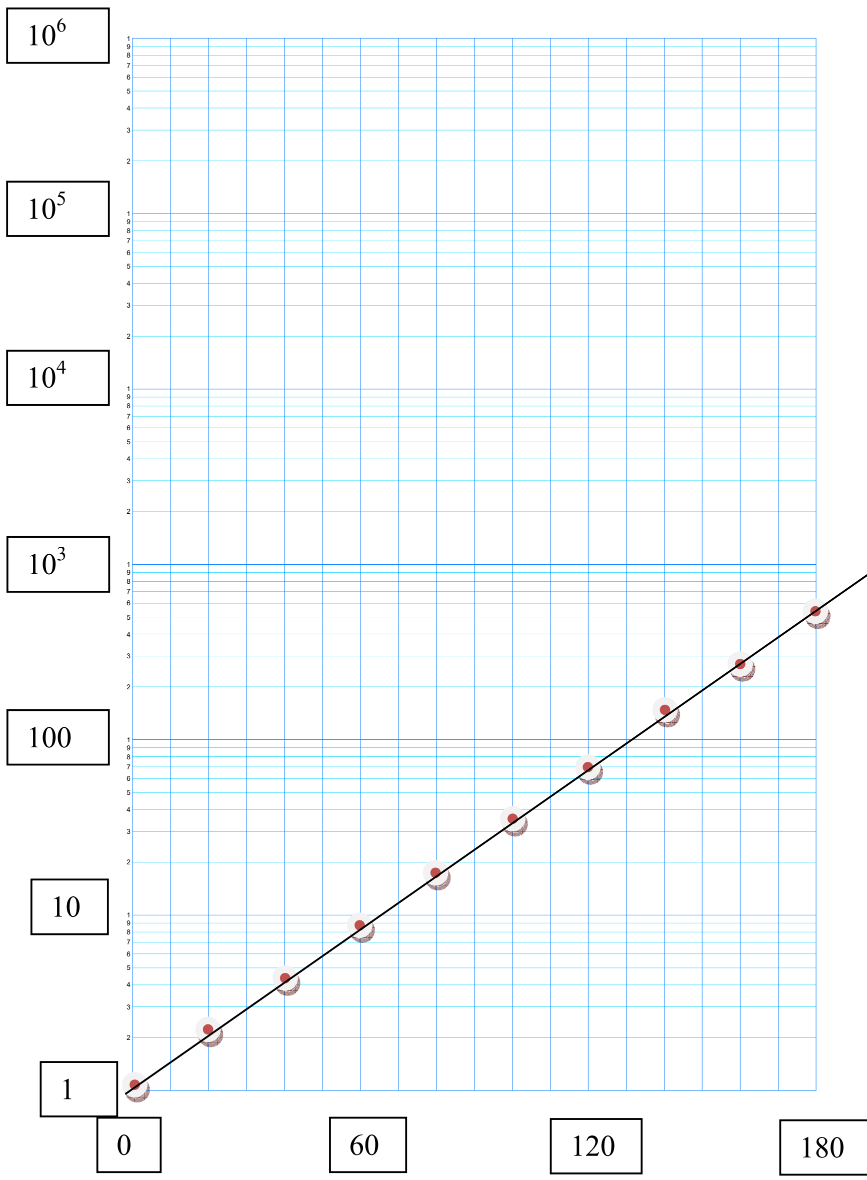
Opgave 5.7 **Ook bacteriën groeien exponentieel.**

a $\boxed{n = \dfrac{t}{T_2} \rightarrow n = \dfrac{12 \times 60 \text{ min}}{20 \text{ min}} = 36}$

b $\boxed{N(n) = N(0) \cdot 2^n \rightarrow N(36) = 1 \times 2^{36} = 2^{36}}$

c Op de verticale as staat de exponent bij het grondtal 10.
Deze is toegenomen van 1 tot 6, dus het aantal N is toegenomen van 10^1 tot 10^7.

d



Opgave 5.8 **Onderzoek exponentiële grafieken.**

In onderstaande grafiek zijn 4 exponentiële grafieken getekend.

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x)=1{,}5^x \quad \text{grafiek B } f(1)=1{,}5 \\ g(x)=2\times 1.5^x \quad \text{grafiek C } g(x)=2\times f(x) \\ h(x)=3^x \quad \text{grafiek D } f(1)=+3 \\ k(x)=-1{,}5^x \quad \text{grafiek A } f(1)=-1{,}5 \end{array}}$$

Opgave 5.9 **Kengetallen bij exponentiële functies.**

a $g(x)=-2^x$
g(x) heeft de tegengestelde waarde van *f(x)*. Dus als *f(1)*= 2 dan *g(1)* = -2 De grafiek van *g(x)* is dus *f(x)* gespiegeld t.o.v de x-as.

b $h(x)=2{\cdot}2^x$
h(x) heeft een waarde die 2x zo groot is dan *f(x)*. Dus als *f(1)*= 2 dan *h(1)* = 4 De grafiek van *h(x)* is dus de grafiek van *f(x)* maar dan een factor 2 'uitgerekt'.

c $k(x)=2^{x-2}=2^x\cdot 2^{-2}=0{,}25\cdot 2^x$
k(x) heeft een waarde die 0,25x zo groot is dan *f(x)*. Dus als *f(1)*= 2 dan *k(1)* = 0,5 De grafiek van *k(x)* is dus de grafiek van *f(x)* maar dan een factor 4 'ingedrukt'.

d $l(x)=2^{x+1}=2^x\cdot 2^1=2\cdot 2^x$
l(x) is dus dezelfde als *h(x)*.

e $m(x)=0{,}5\cdot 2^x=0{,}5\cdot f(x)$

f $n(x)=2^x+2=f(x)+2$
De grafiek van *f(x)* wordt dus 2 naar boven opgeschoven

g $p(x)=2^{-1}\cdot 2^x=\frac{1}{2}\cdot f(x)$ zelfde als *m(x)*

h $q(x)=(2^x)^2=(f(x))^2$
Alle waardes van *f(x)* worden gekwadrateerd .

i $r(x)=4^x=(2^2)^x=(2^x)^2=(f(x))^2$ zelfde als *q(x)*

j $s(x)=2^{-x}=\frac{1}{2^x}$ als *f(1)*=2 dan $s(1)=\frac{1}{2}$
Dus als *f(x)* is klein dan *s(x)* is groot en omgekeerd.

Opgave 5.10 **Exponentiële functie met verschillende grondtallen.**

$f(x)=2^x$

$$\boxed{\begin{array}{l} 2=0{,}5^a=2^{-a}\rightarrow a=-1 \\ 2^x=(0{,}5^{-1})^x=0{,}5^{-x} \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 2=1{,}5^a\rightarrow a={}^{1{,}5}\log(2)=\dfrac{\log(2)}{\log(1{,}5)}=1{,}71\rightarrow 2=1{,}5^{1{,}71} \\ 2^x=(1{,}5^{1{,}71})^x=1{,}5^{1{,}71x} \end{array}}$$

$$of\ exact\ 2 = 1{,}5^{\,^{1,5}\log(2)} \rightarrow 2^x = 1{,}5^{x\cdot ^{1,5}\log(2)}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 2 = 4^a \rightarrow a = 0{,}5 \rightarrow 2 = 4^{0,5} \\ 2^x = (4^{0,5})^x = 4^{0,5x} \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 2 = 10^a \rightarrow a = \log(2) \rightarrow 2 = 10^{0,30} \\ 2^x = (10^{0,30})^x = 10^{0,3\cdot x} \end{array}}$$

$$of\ exact\ 2 = 10^{\log(2)} \rightarrow 2^x = 10^{x\cdot\log(2)}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 2 = 100^a \rightarrow a = {}^{100}\log(2) \rightarrow 2 = 100^{0,151} \\ 2^x = (100^{0,151})^x = 10^{0,151\cdot x} \end{array}}$$

$$of\ exact\ 2 = 100^{\,^{100}\log(2)} \rightarrow 2^x = 100^{x\cdot ^{100}\log(2)}$$

Opgave 5.11 **Exponentiële functie $c(H_3O^+) = 10^{-pH}$**

a $c = 10^{-pH}$

$c > 1$

$10^{-pH} = 1 \rightarrow \log(10^{-pH}) = \log(1) \rightarrow -pH = 0 \rightarrow pH = 0$

$10^{-pH} > 1 \rightarrow \log(10^{-pH}) > \log(1) \rightarrow -pH > 0 \rightarrow pH < 0$

b $c = 10^{-pH}$

$c = 0{,}25$

$10^{-pH} = 0{,}25 \rightarrow \log(10^{-pH}) = \log(0{,}25) \rightarrow pH = -\log(0{,}25) = 0{,}60$

c $c = 10^{-pH}$

$c = 10^0 = 1$ mol/L

Opgave 5.12 ***pH*-waarde is een exponent.**

$c = 10^{-pH}$ $\quad f(x) = 10^{-x}$ $\quad g(x) = 10^{(x-14)}$

$f(x)$ is de concentratie van de H_3O^+-ionen van een oplossing

$g(x)$ is de concentratie van de OH^- ionen van een oplossing.

x is de pH ; $(14 - x) = pOH$

a $f(2) = 10^{-2}$ mol/L

$g(2) = 10^{(2-14)} = 10^{-12}$ mol/L

b $0{,}005 = 10^{-x} \rightarrow -x = \log(0{,}005) \rightarrow x = -\log(0{,}005)$

afgerond : $x = 2{,}30$

c Als $x = 8$ dan $f(x) = 10^{-8}$

Als x > 7 dan $f(x) < 10^{-7}$

Opgave 5.13 **Inverse functies**

Bepaal de inverse functie van :

a $y = 2x + 1 \rightarrow 2x = y - 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \rightarrow y' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

Eerst wordt de functie $x(y)$ opgesteld.
Van de functie van $x(y)$ wordt x nu uitgezet op de verticale as en krijgt het symbool y' of y^{inv} en y op de horizontale as en krijgt het symbool x.

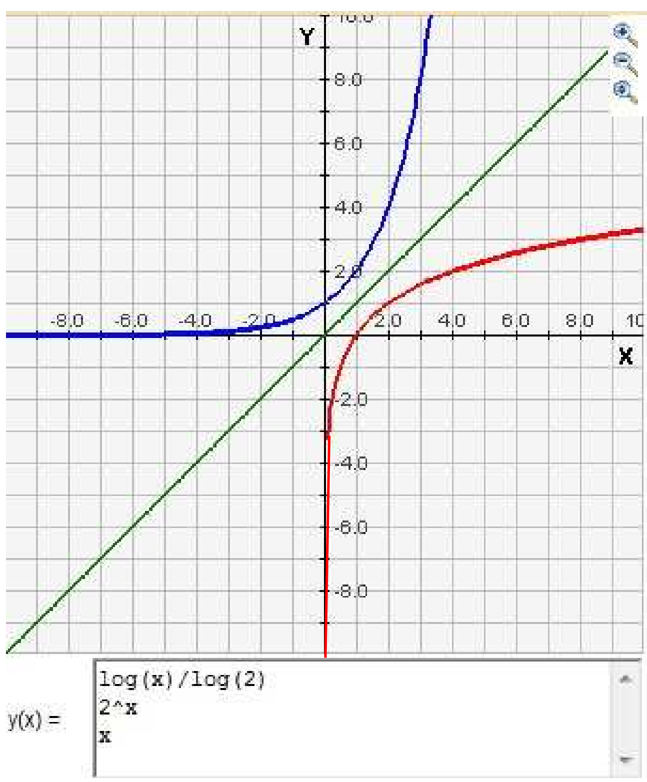
De grafiek $y' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ en die van. $y = 2x + 1$ zijn gespiegeld t.o.v. de lijn $y = x$
Ander voorbeeld uit de praktijk van het lab:
Voor het verband tussen extinctie (E) en concentratie (c) geldt:
$E = 0{,}2c + 0{,}3$ *Dit is de functie $E(c)$*
Je kunt ook c als functie van E geven

$$E = 0{,}2c + 0{,}3 \rightarrow 0{,}2c = E - 0{,}3 \rightarrow c = \frac{E}{0{,}2} - \frac{0{,}3}{0{,}2} \rightarrow c = 5E - 1{,}5$$

Als je E verticaal uitzet tegen c dan krijg je: $y = 0{,}2x + 0{,}3$
Als je c verticaal uitzet tegen E dan krijg je: $y' = 5x - 1{,}5$
y en y' zijn elkaars inverse functies.
Afhankelijk van wat je wil bepalen gebruik je $y(x)$ of $y'(x)$ ofwel $E(c)$ of $c(E)$.

b $y = 2^x \rightarrow x = {}^2\log(y) \rightarrow y' = {}^2\log(x)$

$y = 2^x$ *en* $y' = {}^2\log(x)$ *zijn gespiegeldt.o.v.de lijn* $y = x$



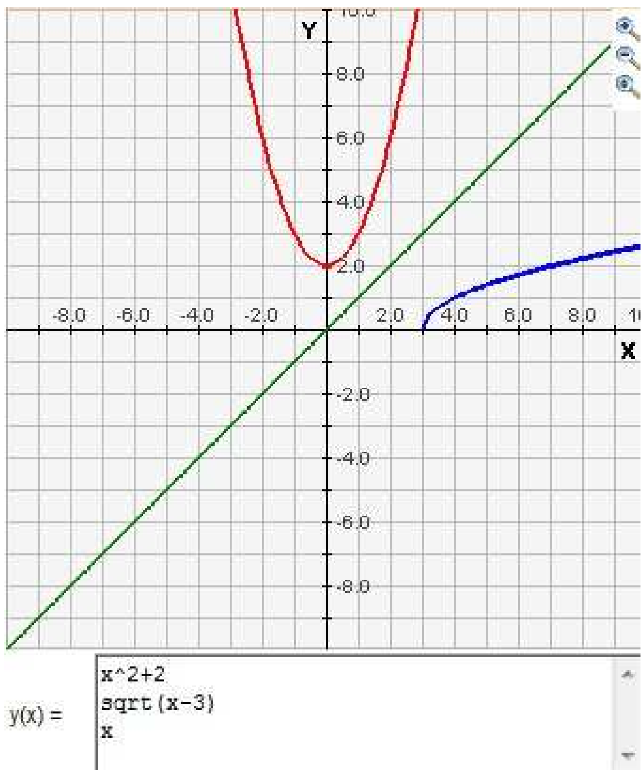
c $\boxed{y = 2x^3 \rightarrow x^3 = \frac{y}{2} \rightarrow x = (\frac{y}{2})^{1/3} \rightarrow y' = (\frac{x}{2})^{1/3} \text{ of } y' = \sqrt[3]{\frac{x}{2}}}$

voor de functie $y' = \sqrt[3]{\frac{x}{2}}$ geldt dat $x \geq 0$

d $\boxed{\begin{array}{l} y = x\sqrt{x} \quad x \geq 0 \\ y = x\sqrt{x} \rightarrow y = x^{3/2} \rightarrow x = y^{2/3} \rightarrow y' = x^{2/3} \end{array}}$

e $y = x^2 + 2$ geldt voor alle waarden van x of $-\infty < x < \infty$ of $x \in R$

$\boxed{y = x^2 + 2 \rightarrow x^2 = y - 2 \rightarrow x = \sqrt{(y-2)} \rightarrow y' = \sqrt{(x-2)} \quad met\ x \geq 2}$



Opgave 5.14 **Logaritmische grafieken.**

a $\log(x)$: grafiek **A** want $\log(x) = 1$ als $x = 10$

$\log(2x)$: grafiek **B** want $\log(2x) = 1$ als $x = 5$

$\log(2x+2)$: grafiek **C** want $2x + 2 > 0 \rightarrow x > -1$

b $\log(x)$: grafiek **C** want $\log(x) = 1$ als $x = 10$

${}^2\log(x)$: grafiek **A** want ${}^2\log(x) = 1$ als $x = 2$

${}^4\log(x)$: grafiek **B** want ${}^4\log(x) = 1$ als $x = 4$

c $\log(x)$: grafiek **C** want $\log(x) = 1$ als $x = 10$

$\log(x^2)$: grafiek **A** want $\log(x^2) = 2 \times \log(x)$ en $\log(x^2) = \log((-x)^2)$

$\log(x^3)$: grafiek **B** want $\log(x^3) = 3 \times \log(x)$

d $\log(x)$: grafiek **C** want $\log(x) = 1$ als $x = 10$

$\log(x^5)$: grafiek **A** want $\log(x^5) = 5 \times \log(x)$

$3\log(x)$: grafiek **B** want $3\log(x) = 3$ als $x = 10$

e $\log(x)$: grafiek **A** want $\log(x) = 1$ als $x = 10$

$\log(x^{-3})$: grafiek **C** want $\log(x^{-3}) = -3 \times \log(x)$

$-2\log(x)$: grafiek **B** want $-2\log(x) = -2$ als $x = 10$

Opgave 5.15 ***pH* = -log[H_3O^+]**

a $pH = -\log[H_3O^+]$

$pH = -\log(0{,}05) = -(- = 1{,}30) = 1{,}30$

b $pH = -\log[H_3O^+]$

$pH = -\log(10^{-4}) = 4$

$pH = -\log(10^{-5}) = 5$

De pH neem toe met 1 als de concentratie 10x zo klein wordt

c $pH = -\log[H_3O^+]$

$0{,}7 = -\log[H_3O^+] \rightarrow -0{,}7 = \log[H_3O^+] \rightarrow [H_3O^+] = 10^{-0{,}7} = 0{,}200$ mol/L

Opgave 5.16 **Grafiek van *E* = -log(*T*)**

Als je de transmissie T schrijft als een macht met grondgetal 10 dan is de exponent de -extinctie (-E).
Als T = 1 (100% doorlatend) dan E = 0

a $T = 10^{-E} \rightarrow$

$0{,}1 = 10^{-E} \rightarrow 10^{-1} = 10^{-E} \rightarrow E = 1$

b $E = 0{,}210$

$T = 10^{-0{,}210} = 0{,}616$ *of* $T = 61{,}6\%$

c $E = k \cdot c$

als $c = 10\ \text{mmol}/\text{L}$ dan E = 0,210

als $c = 5\ \text{mmol}/\text{L}$ dan E = $0{,}105 \rightarrow T = 10^{-0{,}105} = 0{,}785$ *of* 78,5%

d Het meetgebied 0,2 < E < 0,6 is het meest geschikt omdat de transmissie hierbij een waarde heeft tussen $10^{-0{,}2} = 0{,}63$ en $10^{-0{,}6} = 0{,}25$, ofwel tussen 63% en 25%.
Bij zeer lage en zeer hoge waardes van T is E niet evenredig met de concentratie.

Opgave 5.17 **Afname van radio-activiteit is exponentieel.**

a $N(n)=100\cdot(\frac{1}{2})^n \rightarrow N(n)=100\cdot 2^{-n} \rightarrow N(t)=100\cdot 2^{-t/5700}$

b -

c

$N(t)=100\cdot 2^{-t/5700} \rightarrow$

$20=100\cdot 2^{-t/5700} \rightarrow 0{,}2=2^{-t/5700} \rightarrow -t/5700={}^{2}\log(0{,}2) \rightarrow$

$-t/5700=\dfrac{\log(0{,}2)}{\log(2)} \rightarrow -t/5700=-2{,}32 \rightarrow t=2{,}32\times 5700=1{,}3\cdot 10^4 \ \ jaar$

Opgave 5.18 **e als grondtal van de exponentiële functie.**

Schrijf als macht met grondtal **e**.

a $100=e^a \rightarrow a={}^{e}\log(100)=\ln(100)$

$100=e^{\ln(100)} \ \ afgerond: 100=e^{4{,}61}$

b $2=e^{\ln(2)} \quad afgerond: 2=e^{0{,}693}$

c $e=e^1$

d $1=e^0$

e

$y(x)=2^x$

$2=e^{\ln(2)} \rightarrow y=2^x \rightarrow y=(e^{\ln(2)})^x=e^{x\cdot\ln(2)}$

$afgerond: y=e^{0{,}693\cdot x}$

f

$N(t)=N(0)\cdot(0{,}5)^t$

$0{,}5=e^{\ln(0{,}5)} \rightarrow N(t)=N(0)\cdot(e^{\ln(0{,}5)})^t=N(0)\cdot e^{t\cdot\ln(0{,}5)}$

$afgerond: N(t)=N(0)\cdot e^{-0{,}693\cdot t}$

g

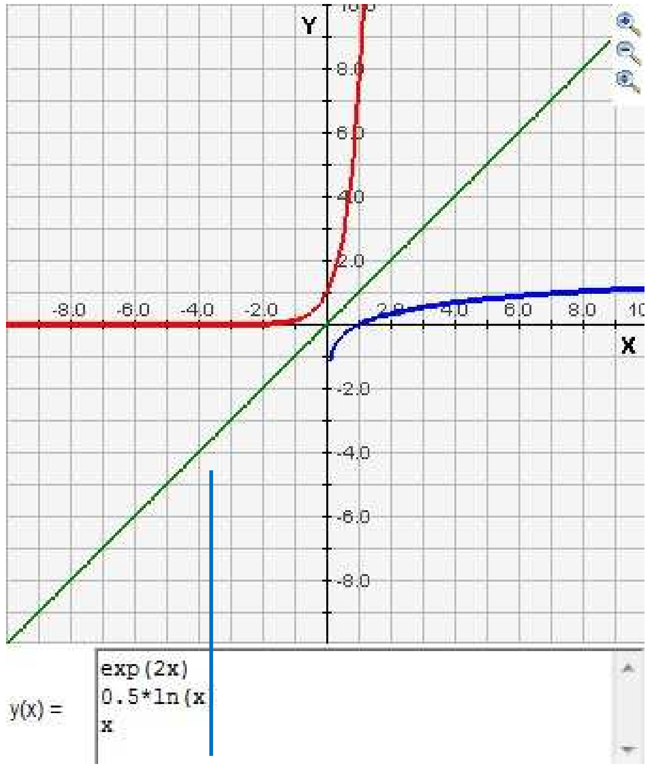
$m(t)=100\cdot(2)^{-0{,}25\cdot t}$

$2=e^{\ln(2)} \rightarrow m(t)=100\cdot(e^{\ln(2)})^{-0{,}25\cdot t}=100\cdot e^{-0{,}25\cdot t\cdot\ln(2)}$

$afgerond: m(t)=100\cdot e^{-0{,}173\cdot t}$

h

$$y = e^{2x}$$
$$\ln(y) = 2x \rightarrow x = 0{,}5 \cdot \ln(y)$$
$$y^{-1} = 0{,}5 \cdot \ln(x) \quad x > 0$$



Opgave 5.19 **Vergelijkingen met exponentiële functies.**

a

$$3^{x-2} = \frac{1}{9} \rightarrow 3^{x-2} = 3^{-2}$$
$$\rightarrow x - 2 = -2 \rightarrow x = 0$$

b

$$(\frac{1}{4})^{x+4} = 4 \rightarrow (4^{-1})^{x+4} = 4^{1} \rightarrow -1(x+4) = 1 \rightarrow -x - 4 = 1$$
$$\rightarrow x = -5$$

c

$$2^{x+2} = 4^{x} \rightarrow 2^{x+2} = 2^{2x} \rightarrow x + 2 = 2x$$
$$\rightarrow -x = -2 \rightarrow x = 2$$

d

$$2^{-x} = 2^{x^2-2} \rightarrow -x = x^2 - 2 \rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$
$$\rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 8}}{2}$$
$$\rightarrow x_1 = \frac{-1+3}{2} = 1 \; en \; x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2$$

e

$$(\frac{1}{4})^{3x-1} = 32\sqrt{8} \rightarrow (2^{-2})^{3x-1} = 2^{5} \cdot 2^{3/2} \rightarrow 2^{-6x+2} = 2^{6,5}$$
$$-6x + 2 = 6{,}5 \rightarrow x = \frac{4{,}5}{-6} = -0{,}75$$

f

$$2^x = 13 \rightarrow x = {}^2\log(13)$$
$$afgerond: x = \frac{\log(13)}{\log(2)} = 3{,}70$$

g

$$5^{2x} = 3^{-x+4}$$
$$5 = 3^{{}^3\log(5)} = 3^{1{,}465}$$
$$\rightarrow (3^{1{,}465})^{2x} = 3^{-x+4} \rightarrow 1{,}465 \times 2x = -x + 4$$
$$\rightarrow 2{,}93x = -x + 4 \rightarrow 3{,}93x = 4 \rightarrow x = \frac{4}{3{,}93} = 1{,}02$$

h

$$3^{x+1} = 4^{x^2+2x}$$
$$3 = 4^{{}^4\log(3)} = 4^{0{,}792}$$
$$\rightarrow (4^{0{,}792})^{x+1} = 4^{x^2+2x}$$
$$\rightarrow 0{,}792(x+1) = x^2 + 2x \rightarrow x^2 + 1{,}208x - 0{,}792 = 0$$
$$vierkantsvergelijking\ met\ 2\ oplos\sin gen$$

Opgave 5.20 **Ongelijkheden met exponentiële functies.**

a

$$3^{x-2} > \frac{1}{9}$$
$$\rightarrow 3^{x-2} > 3^{-2} \rightarrow x - 2 > -2 \rightarrow x > 0$$

b

$$2^{x+4} \geq 5^x$$
$$5 = 2^a \rightarrow a = {}^2\log(5) \rightarrow 5 = 2^{{}^2\log(5)}$$
$$2^{x+4} \geq (2^{{}^2\log(5)})^x \rightarrow x + 4 \geq x \cdot {}^2\log(5)$$
$$\rightarrow x(1 - {}^2\log(5)) \geq -4 \rightarrow x({}^2\log(5) - 1) \leq 4$$
$$\rightarrow x \leq \frac{4}{{}^2\log(5) - 1}$$

Bij de voorlaatste stap vermenigvuldig je rechts en links met -1 , daardoor wordt het >teken verwisseld met <teken.

Met afronding:

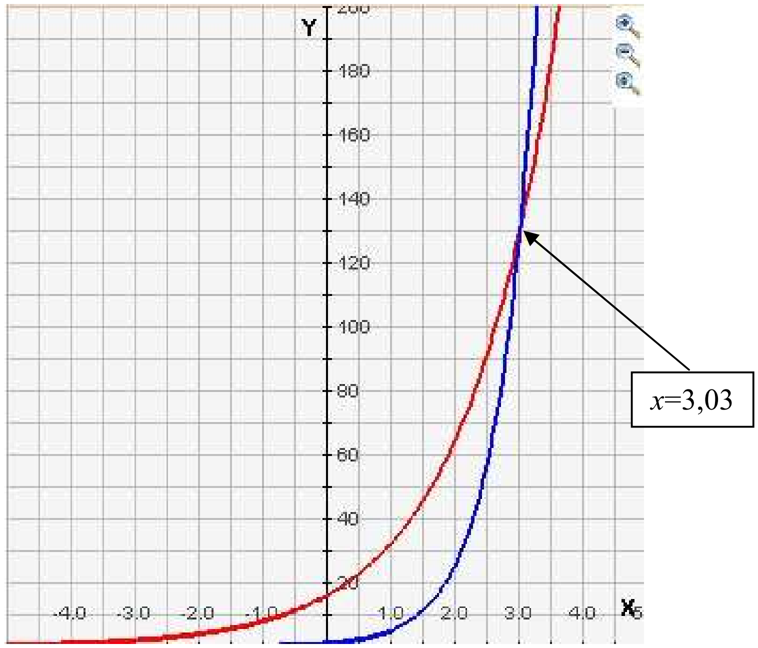
$2^{x+4} \geq 5^x$

$5 = 2^a \rightarrow a = {}^2\log(5) \rightarrow 5 = 2^{2{,}32}$

$2^{x+4} \geq (2^{2{,}32})^x \rightarrow x + 4 \geq 2{,}32x$

$\rightarrow x(1 - 2{,}32) \geq -4 \rightarrow -1{,}32x \geq -4$

$\rightarrow x \leq \dfrac{-4}{-1{,}32} \rightarrow x \leq 3{,}03$



c

$2^{x+2} < 4^{x^2}$

$2^{x+2} < 2^{2x^2} \rightarrow x + 2 < 2x^2 \rightarrow 0 < 2x^2 - x - 2$

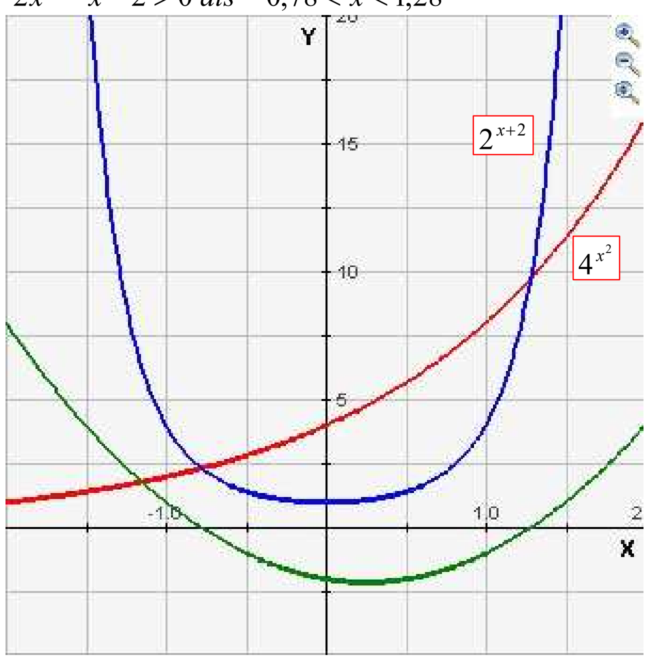
$2x^2 - x - 2 > 0$

$x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 2 \times -2}}{4} = \dfrac{1}{4} \pm \dfrac{1}{4}\sqrt{17}$

afgerond : $x_{1,2} = 0{,}25 \pm 1{,}03 \rightarrow x_1 = -0{,}78$ *en* $x_2 = 1{,}28$

$2x^2 - x - 2$ is een dalparabool met snijpunten -0,78 en 1,28

$2x^2 - x - 2 > 0$ *als* $-0{,}78 < x < 1{,}28$



d

$$2^{-x} \geq 2^{x^2-2}$$
$$-x \geq x^2 - 2 \rightarrow 0 \geq x^2 + x - 2 \rightarrow x^2 + x - 2 \geq 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\times 1\times -2}}{2} = \frac{-1\pm 3}{2} \rightarrow x_1 = -2 \ en\ x_2 = 1$$
$$dalparabool\ dus\ x < -2\ of\ \ x > 1$$

e

$$met\ afronding:$$
$$5^{2x} < 3^{-x+4}$$
$$3 = 5^a \ \rightarrow a = {}^5\log(3) = 0{,}683 \rightarrow 3 = 5^{0{,}683}$$
$$5^{2x} < (5^{0{,}683})^{-x+4}$$
$$\rightarrow 2x < 0{,}683(-x+4) \rightarrow 2x < -0{,}683x + 2{,}73$$
$$\rightarrow 2{,}683x < 2{,}73 \rightarrow x = \frac{2{,}73}{2{,}683} = 1{,}02$$

Opgave 5.21 **Vergelijkingen en ongelijkheden met logaritmische functies.**

a

$$\log(x) > 3\cdot\log(3)$$
$$\log(x) = \log(3^3) \rightarrow x = 3^3$$
$$\rightarrow x > 3^3$$

b

$${}^2\log(4^x - 2) = x \quad 4^x > 2 \rightarrow 2^{2x} > 2^1 \rightarrow 2x > 1 \rightarrow x > 0{,}5$$
$$\rightarrow 2^x = 4^x - 2 \quad stel\ 2^x = p$$
$$\rightarrow p = p^2 - 2 \rightarrow p^2 - p - 2 = 0$$
$$\rightarrow p_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{1\pm 3}{2} \rightarrow p_1 = 2\ en\ p_2 = -1$$
$$\rightarrow 2^x = 2 \rightarrow x = 1$$
$$2^x = -1\ kan\ niet$$

c

$${}^2\log(2x+1) < {}^2\log(x-2) \quad x > -0{,}5\ en\ x > 2\ dus\ x > 2$$
$${}^2\log(2x+1) < {}^2\log(x-2)$$
$$\rightarrow 2x+1 < x-2 \rightarrow x < -3 \quad geen\ oplos\sin g$$

d
$$^{3}\log(x^2+x-2)\geq 2$$
$$(x^2+x-2)\ \textit{moet groter zijn}\ 0$$
$$x^2+x-2=0\rightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}$$
$$x_{1,2}=\frac{-1\pm 3}{2}\rightarrow x_1=-2\ en\ x_2=1\quad dus\ x<-2\ of\ x>1$$
$$x^2+x-2=3^2$$
$$\rightarrow x^2+x-11=0\rightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+44}}{2}$$
$$x_1=\frac{-1+\sqrt{45}}{2}=2{,}85$$
$$x_2=\frac{-1-\sqrt{45}}{2}=-3{,}85$$
beide oplos sin *gen voldoen*

e
$$\ln(x)>1$$
$$x>e^1\rightarrow x>e$$

f
$$^{4}\log(x)>{}^{2}\log(2x)$$
$$^{4}\log(x)>{}^{4}\log(2x)^2\rightarrow x>4x^2\rightarrow 1>4x\rightarrow x<0{,}25$$