

Uitwerkingen hoofdstuk 6

6. Goniometrische functies.

Opgave 6.1 Rekenen met de goniometrische verhoudingsgetallen.

a $2\pi \text{ rad} = 360^\circ \rightarrow \alpha = 1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57,3^\circ$

b $\sin(1) = 0,841$
 $\cos(1) = 0,540$ *Stel de juiste eenheid in op je ZRM*
 $\tan(1) = 1,56$

c $\sin(2) = 0,909$
 $\cos(2) = -0,416$
 $\tan(2) = -2,19$

d $\sin(4) = -0,757$
 $\cos(4) = -0,654$
 $\tan(4) = 1,16$

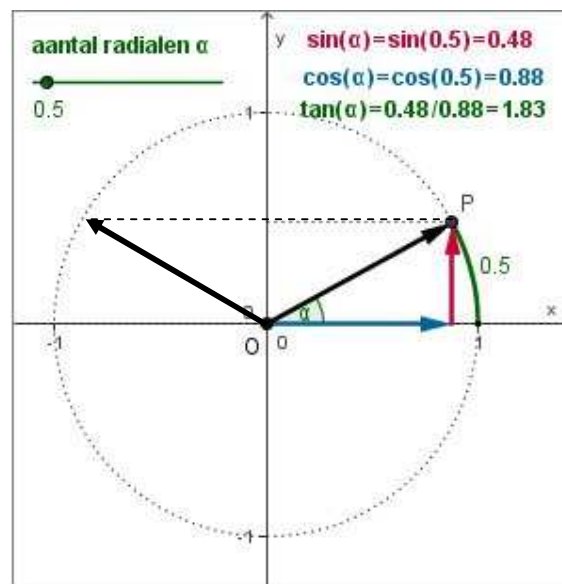
e $\sin(5) = -0,959$
 $\cos(5) = 0,284$
 $\tan(5) = -3,38$

Opgave 6.2 Bereken de hoek α in radialen.

Maak altijd een schetsje met de eenheidscirkel!

Geef alle mogelijke waarden van α tussen 0 en 2π als:

a $\sin(\alpha) = 0,5 \rightarrow \alpha_1 = \arcsin(0,5) = 0,524 \text{ rad}$
 $\alpha_2 = \pi - 0,524 = 2,618 \text{ rad}$



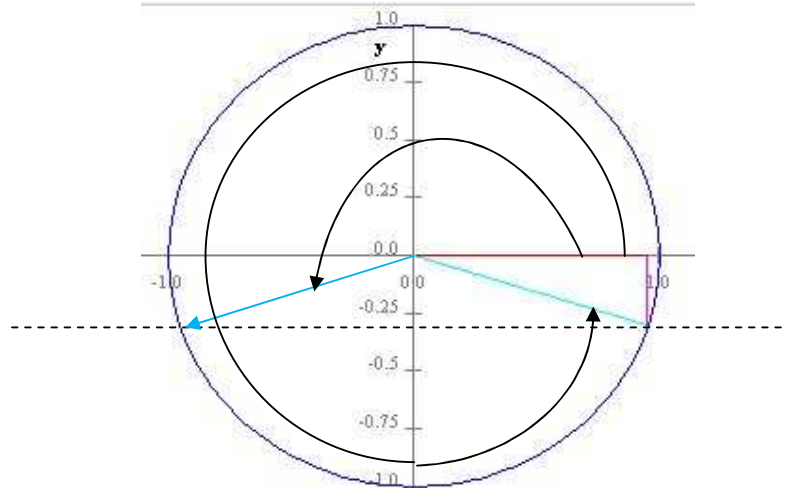
b $2 \sin(\alpha) = 0,3 \rightarrow \sin(\alpha) = 0,15$
 $\rightarrow \alpha_1 = \arcsin(0,15) = 0,151 \text{ rad}$
 $\alpha_2 = \pi - 0,151 = 2,99 \text{ rad}$

c $\cos(2\alpha) = -0,2 \rightarrow 2\alpha = \arccos(-0,2)$
 $\rightarrow 2\alpha_1 = 1,77 \text{ rad} \rightarrow \alpha_1 = 0,886 \text{ rad}$
 $\rightarrow 2\alpha_2 = 2\pi - 1,77 = 4,51 \text{ rad} \rightarrow \alpha_2 = 2,26 \text{ rad}$
 $\rightarrow 2\alpha_3 = 1,77 + 2\pi = 8,05 \text{ rad} \rightarrow \alpha_3 = 4,03 \text{ rad}$
 $\rightarrow 2\alpha_4 = 4,51 + 2\pi = 10,8 \rightarrow \alpha_4 = 5,40 \text{ rad}$

d $\sin(\alpha + 1) = 0,7 \rightarrow (\alpha_1 + 1) = \arcsin(0,7) = 0,775$
 $\rightarrow \alpha_1 = 0,775 - 1 = -0,225 \text{ rad}$
 $\rightarrow (\alpha_2 + 1) = \pi - 0,775 = 2,37 \rightarrow \alpha_2 = 2,37 - 1 = 1,37 \text{ rad}$
 $\rightarrow (\alpha_3 + 1) = 0,775 + 2\pi \rightarrow \alpha_3 = 7,055 - 1 = 6,06$

e $4 \sin(\alpha) = -4 \rightarrow \sin(\alpha) = -1$
 $\rightarrow \alpha = \arcsin(-1) \rightarrow \alpha = \frac{3}{2}\pi = 4,71 \text{ rad}$

f $-2 \sin(\alpha) = 0,6 \rightarrow \sin(\alpha) = -0,3$
 $\rightarrow \alpha = \arcsin(-0,3) \rightarrow \alpha = -0,305 \text{ rad} \rightarrow \alpha_1 = 2\pi - 0,305 \text{ rad} = 5,98 \text{ rad}$
 $\rightarrow \alpha_2 = \pi + 0,305 \text{ rad} = 3,45 \text{ rad}$



g $\tan(\alpha) = 3 \rightarrow \alpha_1 = \arctan(3) = 1,25 \text{ rad}$
 $\rightarrow \alpha_2 = \pi + 1,25 = 4,39 \text{ rad}$

h $\tan(2\alpha) = -1 \rightarrow 2\alpha_1 = \arctan(-1) = -0,784 \text{ rad}$
 $\rightarrow 2\alpha_1 = -0,784 + k \cdot 2\pi$
 $\rightarrow 2\alpha_1 = -0,784 + 2\pi = 5,50 \text{ rad} \rightarrow \alpha_1 = 2,25 \text{ rad}$
 $\rightarrow 2\alpha_1 = -0,784 + 4\pi = 11,78 \text{ rad} \rightarrow \alpha_1 = 5,89 \text{ rad}$
 $\rightarrow 2\alpha_3 = \pi - 0,784 + k \cdot 2\pi = 2,36 + k \cdot 2\pi$
 $\rightarrow 2\alpha_3 = 2,36 \rightarrow \alpha_3 = 1,18 \text{ rad}$
 $\rightarrow 2\alpha_4 = 2,36 + 2\pi = 8,64 \text{ rad} \rightarrow \alpha_4 = 4,32 \text{ rad}$

i $\sin(\alpha - 1) = 0,6 \rightarrow (\alpha - 1) = \arcsin(0,6) = 0,644$
 $\rightarrow (\alpha_1 - 1) = 0,644 \text{ rad} \rightarrow \alpha_1 = 1,64$
 $\rightarrow (\alpha_2 - 1) = \pi - 0,644 = 2,496 \rightarrow \alpha_2 = 3,50$

Opgave 6.3

Ontbinden van een vector.

a $|R| = 25 \text{ en } \theta = 0,32 \text{ rad}$
 $R_x = |R| \cdot \cos(\theta) \rightarrow R_x = 25 \cdot \cos(0,32) = 23,7$
 $R_y = |R| \cdot \sin(\theta) \rightarrow R_y = 25 \cdot \sin(0,32) = 7,86$

b $|R| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \rightarrow |R| = \sqrt{10^2 + 16^2} = 18,9$
 $\tan(\theta) = \frac{R_y}{R_x} \rightarrow \tan(\theta) = \frac{16}{10} = 1,6 \rightarrow \theta = \arctan(1,6) = 1,01 \text{ rad}$

c $R_x = |R| \cdot \cos(\theta) \rightarrow |R| = \frac{R_x}{\cos(\theta)} \rightarrow |R| = \frac{10}{\cos(0,2)} = 10,2$

d $R^2 = R_x^2 + R_y^2 \rightarrow R_x^2 = R^2 - R_y^2 \rightarrow R_x^2 = 400 - 144 = 256 \rightarrow R_x = 16$
 $\tan(\theta) = \frac{R_y}{R_x} \rightarrow \tan(\theta) = \frac{12}{16} = 0,75 \rightarrow \theta = \arctan(0,75) = 0,643 \text{ rad}$

e $R_y = |R| \cdot \sin(\theta) \rightarrow |R| = \frac{R_y}{\sin(\theta)} \rightarrow |R| = \frac{10}{\sin(1,2)} = 10,7$
 $R_x^2 = R^2 - R_y^2 \rightarrow R_x^2 = 10,7^2 - 100 = 15,1 \rightarrow R_x = 3,89$

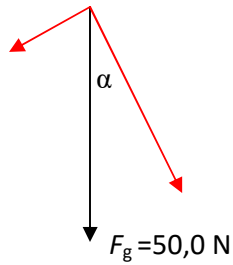
Opgave 6.4

Hellend vlak

a $\sin(\alpha) = \frac{h}{l} \rightarrow \sin(\alpha) = \frac{5,2}{10} = 0,52 \rightarrow \alpha = \arcsin(0,52) = 31,3^\circ$

b $\sin(\alpha) = \frac{h}{l} \rightarrow h = l \cdot \sin(\alpha) = 10 \times \sin(35^\circ) = 5,7 \text{ m}.$

c



$$F_1(\text{loodrecht}) = F_g \cdot \cos(\alpha) \rightarrow F_1(\text{loodrecht}) = 50 \times \cos(25,2^\circ) = 45,2 \text{ N}$$

$$F_2(\text{evenwijdig}) = F_g \cdot \sin(\alpha) \rightarrow F_2(\text{evenwijdig}) = 50 \times \sin(25,2^\circ) = 21,3 \text{ N}$$

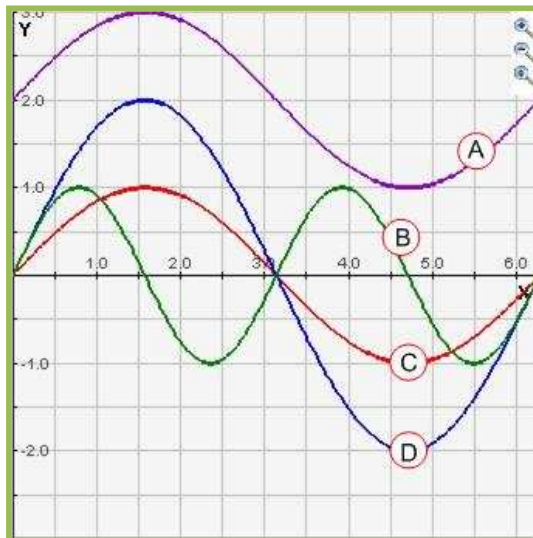
d

$$F_N = F_g \cdot \cos(\alpha) = 45,2 \text{ N}$$

$$F_f = F_g \cdot \sin(\alpha) = 21,3 \text{ N}$$

Opgave 6.5

Onderzoek goniometrische functies.



A: $k(x) = \sin(x) + 2$
 amplitude = 1 1 periode op $[0, 2\pi]$ grafiek is 2 naar boven verschoven

Als x verandert van 0 tot 2π verandert de hoek α van 0 tot 2π rad.

B: $h(x) = \sin(2x)$
 amplitude = 1 2 periodes op $[0, 2\pi]$

Als x verandert van 0 tot 2π verandert de hoek α van 0 tot 4π rad (2x rond).

C: $f(x) = \sin(2x)$
 amplitude = 1 1 periode op $[0, 2\pi]$

D: $f(x) = 2 \cdot \sin(2x)$
 amplitude = 2 1 periode op $[0, 2\pi]$

Opgave 6.6**De functie $y = A\cos(\rho x) + b$**

Hieronder zijn de afgebeeld:

$f(x) = \cos(x)$ hoort bij B, omdat amplitude = 1 en $T = 2\pi$

$g(x) = 2\cos(x)$ hoort bij A, omdat amplitude = 2

$h(x) = \cos(2x)$ hoort bij D, omdat $T = \pi$

$k(x) = \cos(x) + 2$ hoort bij C omdat de grafiek 2 naar boven verschoven is.

Opgave 6.7**Verschuiven, versterken en kortere periode.**

A: $k(x) = 2\sin(2x)$
amplitude = 2 2 periodes op $[0, 2\pi]$

B: $h(x) = \sin(x - \pi/2)$
amplitude = 1 1 periode op $[0, 2\pi]$ $\pi/2$ naar rechts verschoven

De beginhoek $\alpha_0 = -\pi/2$ of $3\pi/2$

C: $g(x) = \sin(x + \pi/2)$
amplitude = 1 1 periode op $[0, 2\pi]$ $\pi/2$ naar links verschoven

De beginhoek $\alpha_0 = \pi/2$

D: $f(x) = \sin(x)$
amplitude = 1 1 periode op $[0, 2\pi]$

Opgave 6.8**De functie**

y is de hoogte van het draaiend punt en x bepaald de hoek.

Hieronder zijn de afgebeeld:

$f(x) = \sin(x)$ hoort bij B, omdat de amplitude = 1 en $T = 2\pi$

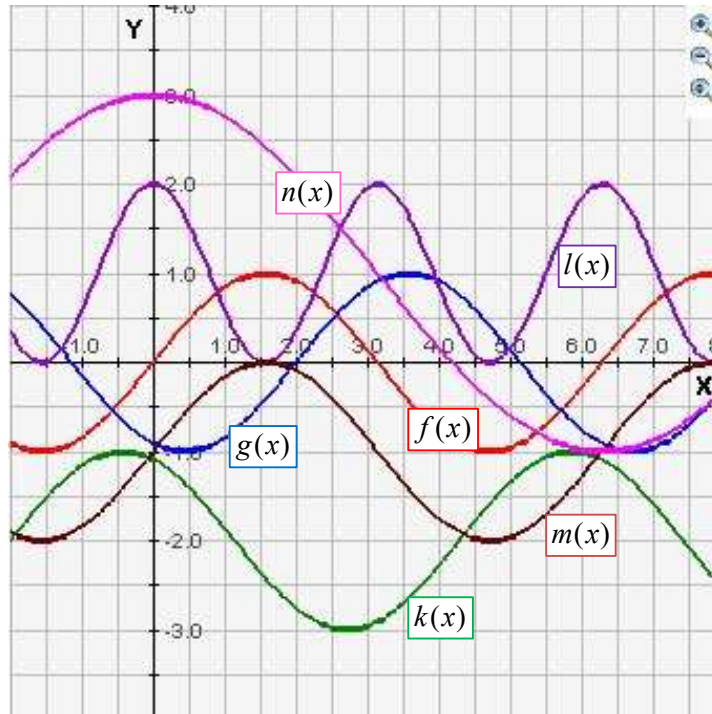
$g(x) = \sin(x+1)$ hoort bij C, omdat de grafiek 1 naar links verschoven is. **$(x + 1) = 0$ als $x = -1$**

$h(x) = \sin(2x + 4)$ hoort bij A, omdat $T = \pi$ en de grafiek 4 naar links verschoven is

$k(x) = \sin(x + 1) - 2$ hoort bij D, omdat de grafiek 2 naar beneden verschoven is.

Opgave 6.9

Schetsen van de grafiek $y = A\sin(kx + c) + b$

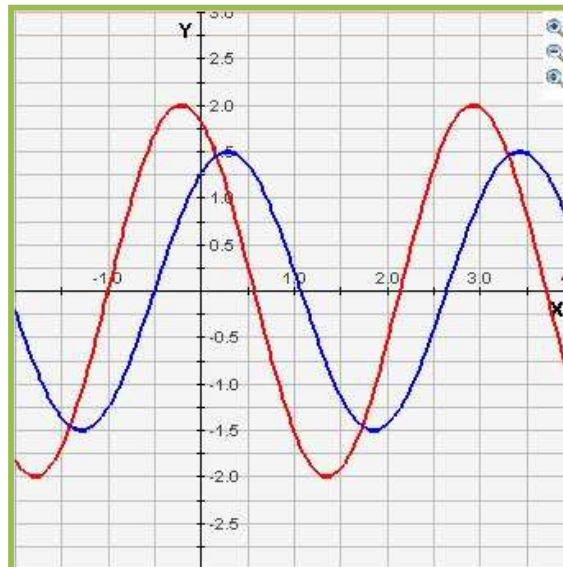


Opgave 6.10

De functie

Hierna zijn de grafieken afgebeeld van:

$U(t) = 2\sin(2t + 2)$ en $I(t) = 1,5\sin(2t + 1)$



- a De amplitude van $U(t) = 2$
De amplitude van $I(t) = 1,5$

b $\frac{2\pi}{T} = 2 \rightarrow T = 3,14 \text{ s}$

c verschuiving van $U(t)$ is -1s of $-\frac{1}{3,14}T = -0,32T$ dus $0,32T$ naar links

als $t = -1$ dan $(2t + 2) = 0$

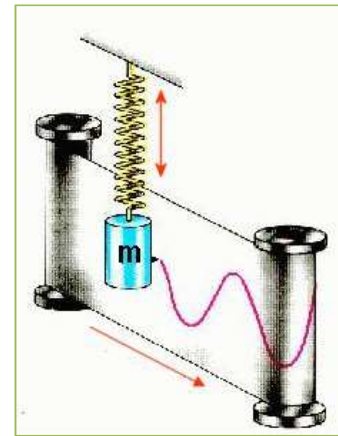
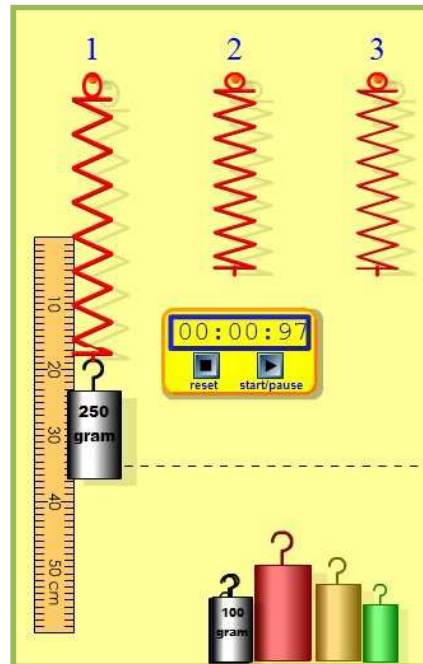
verschuiving van $I(t)$ is $-0,5\text{s}$ of $-\frac{0,5}{3,14}T = 0,16T$ naar links

als $t = -0,5$ dan $(2t + 1) = 0$

d voor $U(t)$: $\alpha_0 = 2\text{ rad}$

Opgave 6.11

De functie $u(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha_0\right)$ bij een veer-massa systeem.



Simulatie van PhET
(University of Colorado)

$$\text{a } T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{C}} \rightarrow T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{m}{C} \rightarrow C = \frac{4\pi^2 m}{T^2}$$

$$\rightarrow C = \frac{4\pi^2 \times 0,25}{1^2} = 9,87 \text{ N/m}$$

$$\text{b } u(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha_0\right) \rightarrow u(t) = 0,2 \sin\left(\frac{2\pi}{1} \cdot t + 0\right)$$

$$\rightarrow u(t) = 0,2 \sin(2\pi \cdot t)$$

$$\text{c } T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{C}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{0,1}{9,87}} = 0,632 \text{ s}$$

$$u(t) = 0,2 \sin\left(\frac{2\pi}{0,632} \cdot t\right) \rightarrow u(t) = 0,2 \sin(9,94 \cdot t)$$

$$\text{d } u(t) = 0,2 \sin(9,94 \cdot t + 3,14)$$

e Voor de beweging van een massa aan een veer geldt:

$$u(t) = 30 \sin(1,44t + \pi/2)$$

$$\frac{2\pi}{T} = 1,44 \rightarrow T = \frac{2\pi}{1,44} = 4,36 \text{ s}$$

$$T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{m}{C} \rightarrow m = \frac{C \cdot T^2}{4\pi^2} = \frac{9,87 \times 4,36^2}{4 \times \pi^2} = 4,75 \text{ kg}$$

$$\alpha_0 = \pi/2 \text{ rad}$$

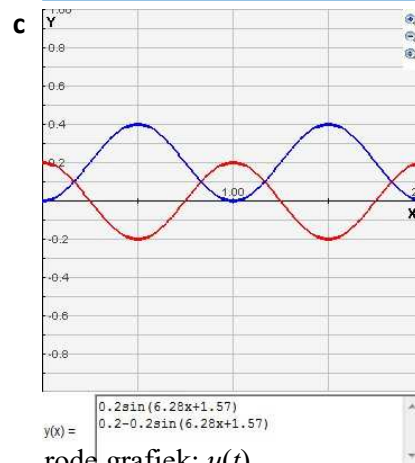
Opgave 6.12

De energieomzetting bij een veer-massa systeem.

a massa begint in bovenste punt

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

b $s(t) = A - A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow s(t) = 0,2 - 0,2 \sin(2\pi \cdot t + \frac{\pi}{2})$



rode grafiek: $u(t)$
blauwe grafiek: $s(t)$

d $E_v(\text{max}) = \frac{1}{2}Cs^2 \rightarrow E_v(\text{max}) = \frac{1}{2} \times 9,87 \times 0,6^2 = 1,78 \text{ J}$

e $E_v = 0 \text{ als } s = 0 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$

f

$$h(t) = A + u(t) = 0,3 + 0,2 \sin(2\pi \cdot t + \frac{\pi}{2})$$

$$E_p(t) = mgh = 0,25 \times 9,8 \times (0,3 + 0,2 \sin(2\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}))$$

Opgave 6.13

De functie $u(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha_0\right)$ bij een slinger.

a $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \rightarrow T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{2}{9,81}} = 2,84 \text{ s}$

b $u(t) = 0,1 \sin\left(\frac{2\pi}{2,84} \cdot t + 0\right) \rightarrow u(t) = 0,1 \sin(2,21 \cdot t)$

c
$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \rightarrow T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{1}{9,81}} = 2,01 \text{ s}$$

$$u(t) = 0,1 \sin\left(\frac{2\pi}{2,01} \cdot t + 0\right) \rightarrow u(t) = 0,1 \sin(3,14 \cdot t)$$

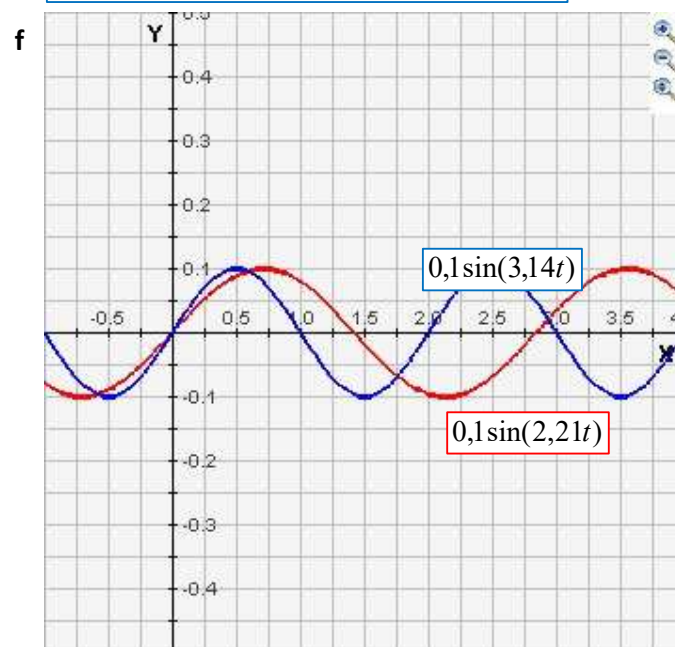
d
$$u(t) = 0,1 \sin(3,14 \cdot t + 3,14)$$

e
$$\frac{2\pi}{T} = 2 \rightarrow T = \frac{2\pi}{2} = 3,14 \text{ s}$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \rightarrow T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{l}{g} \rightarrow l = \frac{T^2 \cdot g}{4\pi^2}$$

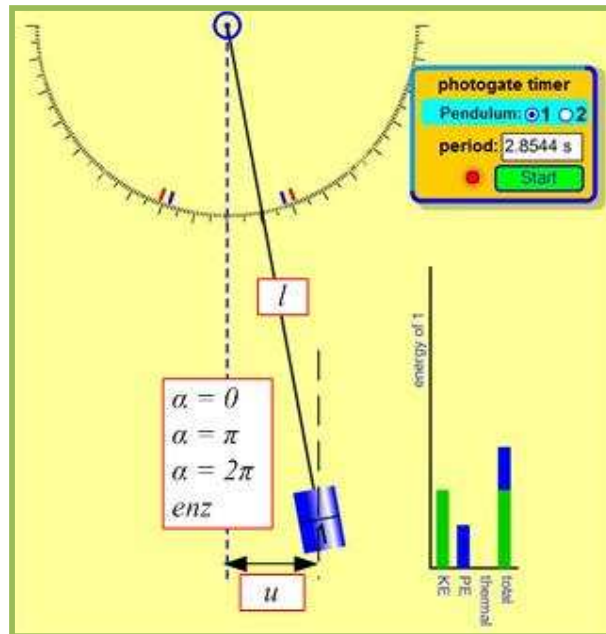
$$\rightarrow l = \frac{3,14^2 \times 9,81}{4\pi^2} = 2,45 \text{ m}$$

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$$



Opgave 6.14

De energieomzetting bij een slinger.



a

$$E_{k,\max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2$$

$$v_{\max} = \frac{2\pi \times 0,2}{2,85} = 0,44 \text{ m/s}$$

$$E_{k,\max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = \frac{1}{2} \times 1 \times 0,44^2 = 0,097 \text{ J}$$

b

$$E_{k,\max} = E_p \rightarrow 0,097 = mg\Delta h \rightarrow \Delta h = \frac{0,097}{mg} = 0,0099 \text{ m} = 9,9 \text{ mm}$$

c

$$E_k(t) = \frac{1}{2} m v^2 = 0,5(0,44 \cos(\frac{2\pi}{2,85} t))^2 = 0,097 \cos^2(2,2t)$$

d Voor de beweging van een massa aan een slinger geldt:

$$u(t) = 3 \sin(3,14t + \pi/2) \quad u \text{ in cm}$$

$$\frac{2\pi}{T} = 3,14 \rightarrow T = 2,00 \text{ s}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \rightarrow T^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g} \rightarrow l = \frac{T^2 \cdot g}{4\pi^2} = 0,994 \text{ m}$$

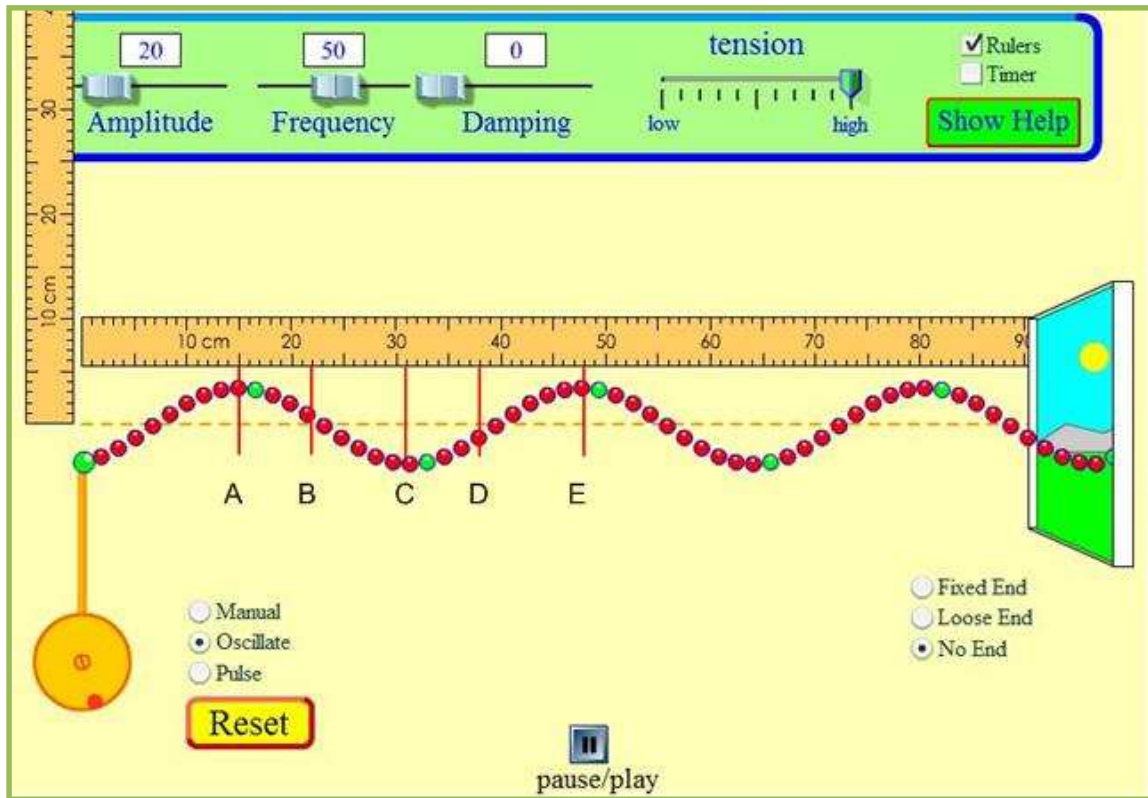
$$\alpha_0 = \pi/2 \text{ rad}$$

$$\sin(\text{max. hoek slinger}) = \frac{3}{99,4} = 0,030 \rightarrow \text{max. hoek} = 0,030 \text{ rad}$$

Opgave 6.15

Lopende golf

Voor punt A geldt : $u(t) = 4 \sin(100\pi \cdot t)$



a $\lambda = AE = 47 \text{ cm} - 15 \text{ cm} = 32 \text{ cm} = 0,32 \text{ m}$

b
$$\lambda = v \cdot T \rightarrow v = \frac{\lambda}{T}$$

$$\frac{2\pi}{T} = 100\pi \rightarrow T = \frac{2\pi}{100\pi} = 0,02 \text{ s}$$

$$v = \frac{0,32 \text{ m}}{0,02 \text{ s}} = 16 \text{ m/s}$$

c
$$u_A(t) = 4 \sin(100\pi \cdot t)$$

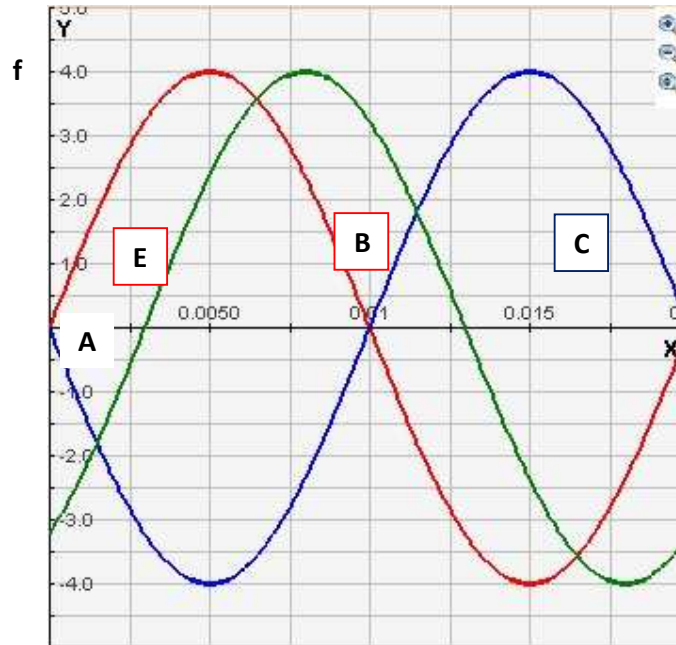
$$u_E(t) = 4 \sin(100\pi \cdot t - 2\pi)$$

d
$$u_A(t) = 4 \sin(100\pi \cdot t)$$

$$u_C(t) = 4 \sin(100\pi \cdot t - \pi)$$

e
$$u_A(t) = 4 \sin(100\pi \cdot t)$$

$$u_B(t) = 4 \sin(100\pi \cdot t - \frac{7}{47} \cdot 2\pi) = 4 \sin(100\pi \cdot t - 0,936)$$



Opgave 6.16

Experiment om de viscositeit van een vloeistof te bepalen.

a
$$\frac{2\pi}{T} = 4 \rightarrow T = 1,57 \text{ s} \rightarrow f = \frac{1}{T} = 0,637 \text{ Hz}$$

b
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot l}{g} \rightarrow l = \frac{T^2 \cdot g}{4\pi^2} = 0,61 \text{ m}$$

c U_1 hoort bij de grafiek , waarvan de amplitude het sterkst afneemt omdat de $e^{-0,5t}$ sterker afneemt dan $e^{-0,2t}$

Opgave 6.17

Spanning van de wandcontactdoos.

a
$$U(t) = 325 \sin\left(\frac{2\pi}{0,02} \cdot t\right) \rightarrow U(t) = 325 \sin(100\pi \cdot t)$$

b
$$U(t) = 325 \cdot \sin(100\pi)$$

Opgave 6.18

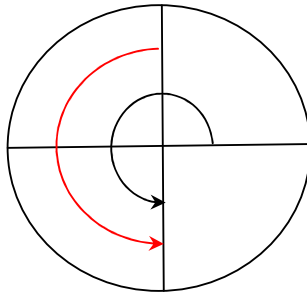
Faseverschil tussen spanning over weerstand en spoel wisselstroom.

a Stel het functievoorschrift op voor U_R en U_L op.
Kies $t = 0$ bij 338 s.

$$U_R = 5 \sin\left(\frac{2\pi}{2} t\right) = 5 \sin(\pi t)$$

$$U_L = 10 \cos(\pi t)$$

b Schets in één cirkel het verloop van U_R en U_L op.



Opgave 6.19

Enkele goniometrische vergelijkingen.

a

$$3 \sin(4x) \geq 1$$

$$3 \sin(4x) = 1 \rightarrow \sin(4x) = \frac{1}{3} \quad \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) = 0,340 \text{ rad}$$

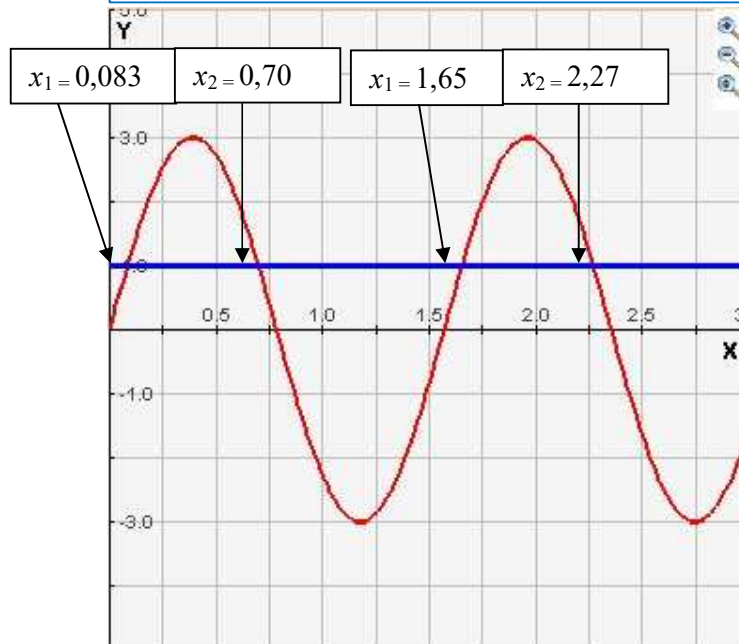
$$\sin(4x_1) = \sin(0,340) \rightarrow 4x_1 = 0,34 + k \cdot 2\pi \rightarrow x_1 = 0,0834 + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

$$x_1 = 0,0834; 1,65 \text{ mod}\left(\frac{1}{2}\pi\right)$$

en

$$\sin(4x_2) = \sin(\pi - 0,34) \rightarrow 4x_2 = 2,80 \rightarrow x_2 = 0,70 + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

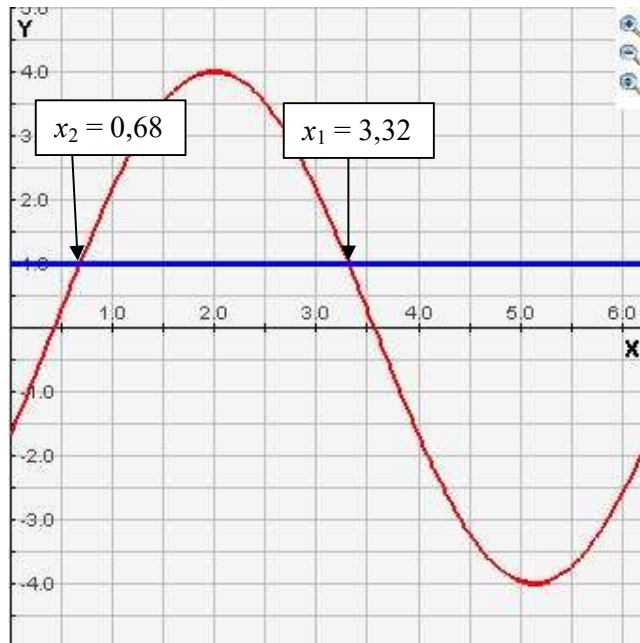
$$x_2 = 0,70; 2,27 \text{ mod}\left(\frac{1}{2}\pi\right)$$



oplossing $3 \sin(4x) \geq 1$:

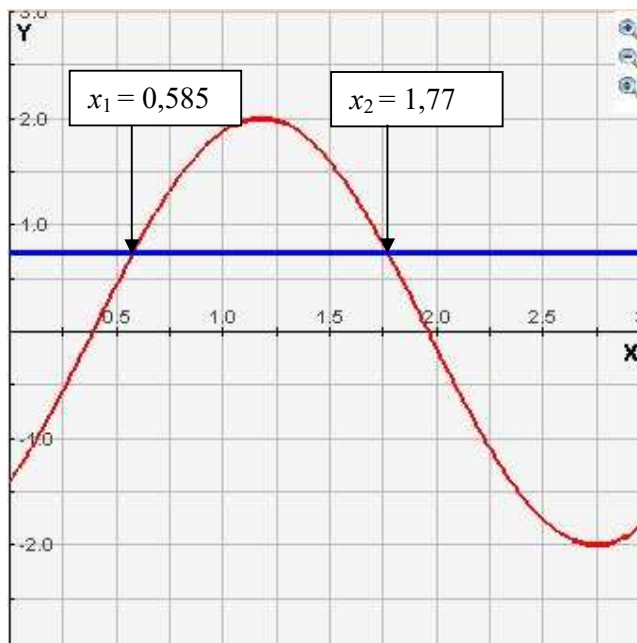
$$0,0834 \leq x \leq 0,70 \text{ mod}\left(\frac{1}{2}\pi\right)$$

b $4 \cos(x - 2) = 1$
 $\cos(x - 2) = 0,25 \quad \arccos(0,25) = 1,32$
 $\cos(x_1 - 2) = \cos(1,32) \rightarrow x_1 - 2 = 1,32 + k \cdot 2\pi$
 $\rightarrow x_1 = 3,32 + k \cdot 2\pi$
en
 $\cos(x_2 - 2) = \cos(2\pi - 1,32) \rightarrow x_2 - 2 = 2\pi - 1,32 + k \cdot 2\pi$
 $\rightarrow x_2 = 0,68 + k \cdot 2\pi$



oplossing $4\cos(x - 2) < 1$:
 $-2,96 \leq x \leq 0,68 \text{ mod}(2\pi)$

c $2 \sin(2x - \frac{\pi}{4}) \geq 0,75$
 $2 \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = 0,75 \rightarrow \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = 0,375 \quad \arcsin(0,375) = 0,384$
 $\sin(2x_1 - \frac{\pi}{4}) = \sin(0,384) \rightarrow 2x_1 - \frac{\pi}{4} = 0,384 + k \cdot 2\pi$
 $\rightarrow 2x_1 = 1,17 + k \cdot 2\pi \rightarrow x_1 = 0,585 + k \cdot \pi$
en
 $\sin(2x_2 - \frac{\pi}{4}) = \sin(\pi - 0,384) \rightarrow 2x_2 - \frac{\pi}{4} = 2,76 + k \cdot 2\pi$
 $\rightarrow 2x_2 = 3,54 + k \cdot 2\pi \rightarrow x_2 = 1,77 + k \cdot \pi$



oplossing $2\sin(2x - \frac{\pi}{4}) \geq 0,75$:
 $0,585 \leq x \leq 1,77 \text{ mod}(\pi)$

d

$$0,5 \tan(0,5x - \frac{\pi}{3}) > 2$$

$$0,5 \tan(0,5x - \frac{\pi}{3}) = 2 \rightarrow \tan(0,5x - \frac{\pi}{3}) = 4 \quad \arctan(4) = 1,33$$

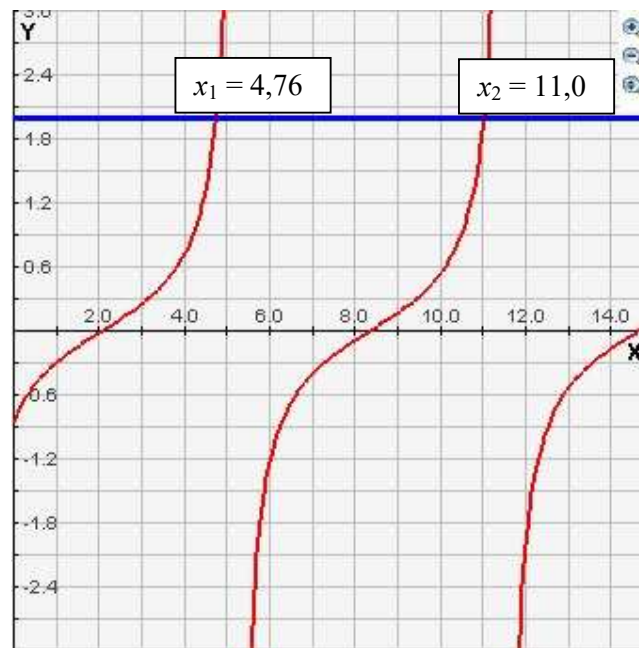
$$\tan(0,5x_1 - \frac{\pi}{3}) = \tan(1,33) \rightarrow 0,5x_1 - \frac{\pi}{3} = 1,33 + k \cdot 2\pi$$

$$\rightarrow 0,5x_1 = 2,38 + k \cdot 2\pi \rightarrow x_1 = 4,76 + k \cdot 4\pi$$

en

$$\tan(0,5x_2 - \frac{\pi}{3}) = \tan(\pi + 1,33) \rightarrow 0,5x_2 - \frac{\pi}{3} = 4,47 + k \cdot 2\pi$$

$$\rightarrow 0,5x_2 = 5,52 + k \cdot 2\pi \rightarrow x_2 = 11,0 + k \cdot 4\pi$$



oplossing $0,5 \tan(0,5x - \frac{\pi}{3}) > 2$:
 $4,76 \leq x \leq 11 \text{ mod}(4\pi)$