1 Lineaire functies.

Onderwerpen	opgave
1.1 Formule, tabel en grafiek.	1.1
1.2 Betekenis snijpunt lineaire grafieken.	1.2 t/m 1.3
1.3 Functievoorschrift en constantes bij lineair verband.	1.4 t/m 1.6
1.4 Gelijkheden en ongelijkheden.	1.7 t/m 1.9
1.5 Inverse functie.	1.10 t/m 1.11
1.6 Functie in de vergelijkingsvorm. Twee vergelijkingen met twee onbekenden.	1.12 t/m 1.14
1.7 Grafieken loodrecht op elkaar.	1.15

2 Kwadratische functies.

Onderwerpen	opgave
2.1 Algemeen functievoorschrift kwadratische functie.	2.1
2.2 Functievoorschrift $f(x) = a(x + p)(x+q)$ voor een parabool.	2.2 t/m 2.4
2.3 Functievoorschrift $f(x) = a(x + p)^2 + q$ voor een parabool.	2.5
2.4 Snijpunten en top van $f(x) = ax^2 + bx + c$	2.6
2.5 Bijzondere functies met b=0 en c=0	2.7 t/m 2.8
2.6.Verschuiven van grafieken.	2.9 t/m 2.10
2.7 Gelijkheden en ongelijkheden met kwadratische functies.	2.11 t/m 2.13
2.8 Functie opstellen als 3 punten van de grafiek gegeven zijn.	2.14
2.9 Toepassingen kwadratische functies.	2.15 t/m 2.18

3 Gebroken functies

Onderwerpen	opgave
3.1 Functievoorschrift en grafiek van gebroken functie.	3.1 t/m 3.4
3.2 Functievoorschrift opstellen bij bepaalde gegevens.	3.5
3.3 Gelijkheden en ongelijkheden bij gebroken functies	3.6 t/m 3.9
3.4 Lineariseren hyperbool.	3.10 t/m 3.11
3.5 Samenstellen gebroken functies.	3.12
3.6 Andere functies met asymptoten.	3.13 t/m 3.15

4 Machtsfuncties en wortelfuncties.

5 Exponentiële en logaritmische functies.

6 Goniometrische functies.

7 Differentiëren.

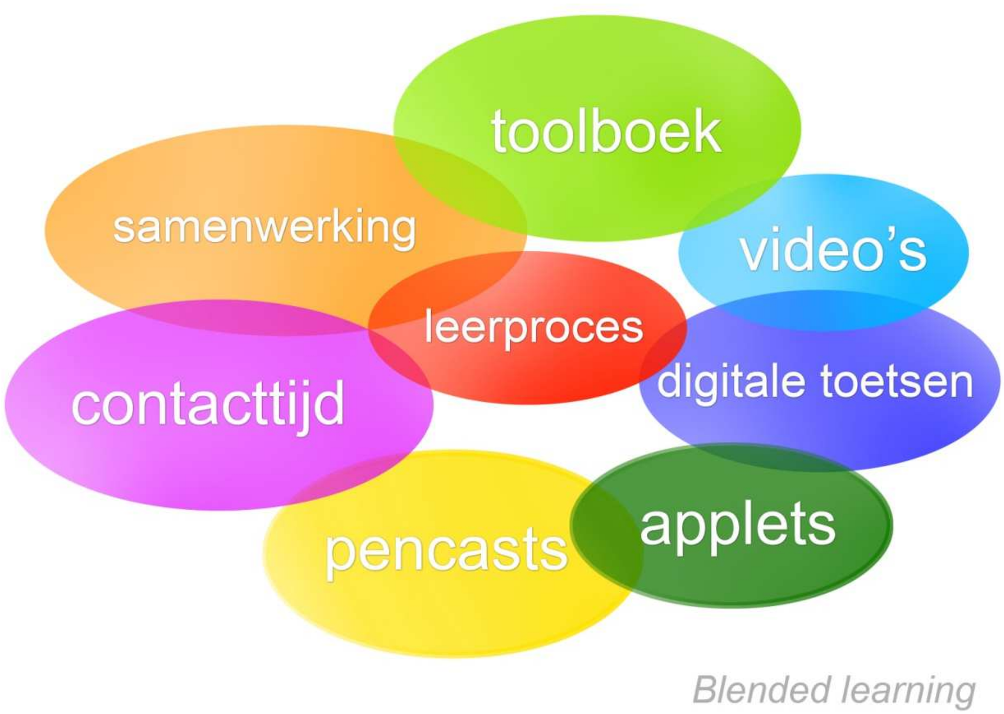
Verantwoording

Dit boek kun je beschouwen als een leidraad voor een cursus wiskunde waarbij het gebruik van internet een belangrijke rol speelt. Blended learning, waarbij een diversiteit aan onderwijsvormen gebruikt wordt, is de ideale manier om onderwijs op maat aan te bieden. Op de site www.vervoortboeken.nl staat een grote verzameling tools.In het boek wordt met specifieke iconen aangegeven waar digitale toetsen, pencasts, video's of applets op het internet beschikbaar zijn. Ook antwoorden en uitwerkingen zijn op deze site beschikbaar. Voor de toets- en oefenmogelijkheden wordt vaak doorverwezen naar elearning sites zoals de de WIMS-server van de universiteit Leiden. Hier kun je jezelf op ieder moment toetsen en krijg je ook feedback op je activiteiten. De geselecteerde applets, vrij beschikbaar op internet, zijn altijd interactief en zijn didactisch erg goed. Het niveau van het materiaal is afgestemd op de propedeutische fase van het technische HBO.Oefenen is belangrijk, maar wiskunde krijgt pas echt betekenis als het toegepast wordt. Waar mogelijk worden vooral science-contexten gebruikt. Dit boek is het resultaat van een continu ontwikkelingsproces door interactie met studenten en collega's. Hiervoor dank aan de studenten en in het bijzonder Jan Jelle Claus en Marijn de Clerck, docenten wiskunde aan de Fontys Hogescholen te Eindhoven.

Een bijzonder woord van dank aan Teo Kleintjes voor de kritische opmerkingen bij de eerste editie.

Succes met 'Blended Learning'!

Jos Vervoort



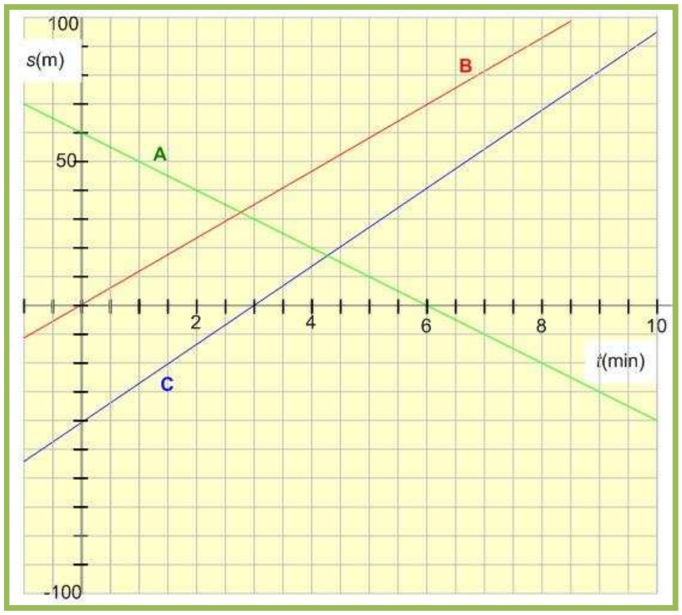
Gebruikte iconen :

1.2	**Reflectievragen.**
1.1	**Verwijzing naar interactieve applets.**
2.3	**Verwijzing naar oefen en toetsomgeving internet.**
2.1	**Uitleg op de site http://www.vervoortboeken.nl**

Opgave 1.2 **Functievoorschrift bedenken bij een grafiek.**

Blz. 12

In onderstaande figuur zijn de grafieken getekend die horen bij de rechtlijnige beweging met constante snelheid van A, B en C.



a Bedenk voor de bewegingen van A, B en C een voorschrift voor de functie $s(t)$.

b Bereken het snijpunt van de grafiek van A en B.

c Bereken het snijpunt van de grafiek van A en C.

d Bereken tijdstip en plaats waar C B inhaalt.

e Bereken de afstand tussen A en C op $t = 8$ min.
$s_A\,(8) - s_C\,(8) = \ldots..$

f Bereken het tijdstip waarop C 30 meter links van A is.

? **1.1**

Behoefte aan oefening met balansmethode?
***Kies voor* ax + b = cx + d**

? **1.2**

Behoefte aan oefening met haakjes?
***Kies voor* k(a + b)#**

Blz. 20

1.5 Inverse functie

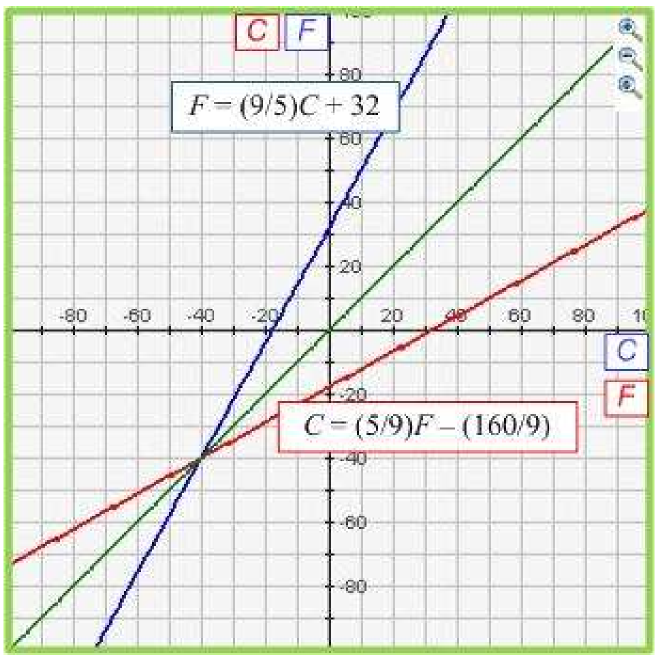
Voor het omrekenen van de temperatuur in graden Fahrenheit (˚F) naar graden Celsius (˚C) geldt het functievoorschrift:

$$\boxed{C(F) = \frac{5}{9}F - \frac{160}{9}}$$

Voor het omrekenen van de temperatuur in graden Celsius (˚C) naar graden Fahrenheit (˚F) geldt het functievoorschrift:

$$\boxed{F(C) = \frac{9}{5}C + 32}$$

$C(F)$ en $F(C)$ zijn inverse functies.
De grafieken van $C(F)$ en $F(C)$ zijn gespiegeld t.o.v. de lijn F = C.



In wiskundige notatie krijgen de functie het voorschrift:

$$\boxed{y(x) = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9}} \quad \text{en} \quad \boxed{y^{-1}(x) = \frac{9}{5}x + 32}$$

$y = C \ en\ x = F \qquad y^{-1} = F \ en\ x = C$

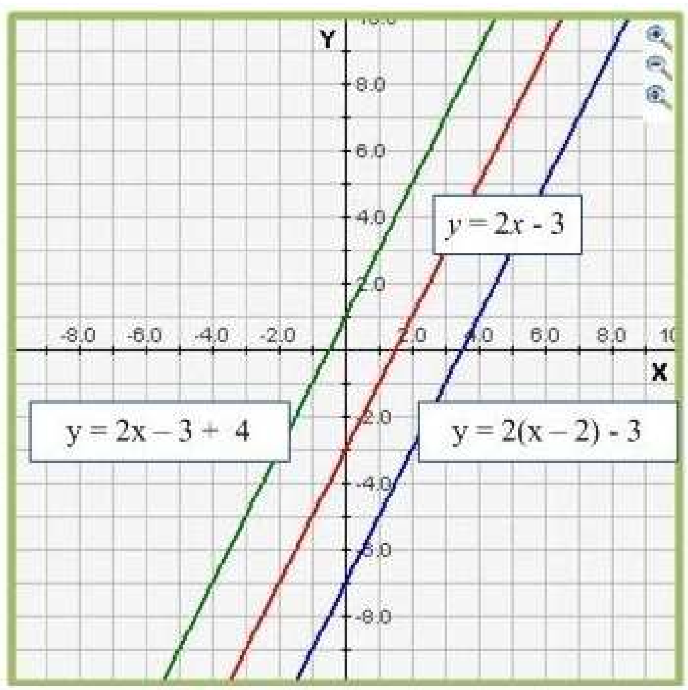
$y^{-1}(x)$ is de inverse functie van $y(x)$

Bij inverse functies geldt: $rc(y^{-1}) \times rc(y) = 1$

Ieder hoofdstuk wordt samen gevat met afbeeldingen zoals hieronder.
Op de site is een mindmap beschikbaar met een overzicht van alle functies.

evenwijdige lijn

http://www.shodor.org/interactivate/activities/GraphSketcher/



Voor de rode lijn l geldt:
$\boxed{f(x) = 2x - 3}$

Voor de blauwe lijn geldt:
$\boxed{g(x) = 2(x-2) - 3}$

In plaats van x wordt $(x-2)$ ingevuld. Voor $x = 2$ heeft $g(x)$ dezelfde waarde als $f(x)$ voor $x = 0$
De grafiek van $f(x)$ is 2 schaaldelen naar rechts verschoven.
Als je i.p.v. x de term $(x+3)$ invult zal de grafiek 3 schaaldelen naar links verschoven worden.

Voor de groene lijn geldt:
$\boxed{h(x) = 2x - 3 + 4}$

Bij $f(x)$ wordt 4 opgeteld waardoor de grafiek 4 schaaldelen naar boven verschoven wordt. Als je i.p.v. +4 er -3 doet zal de grafiek 3 naar beneden verschoven worden.

Blz. 41

Voorbeeld 1:

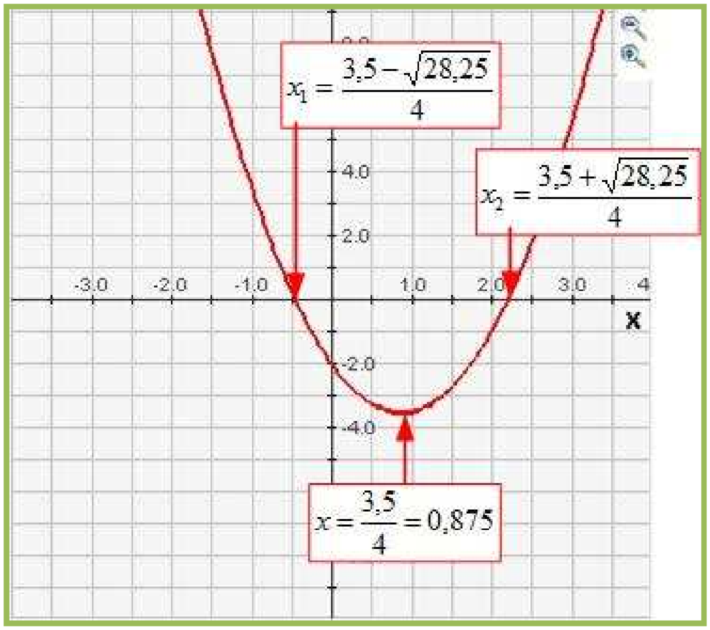
$f(x) = 2x^2 - 3{,}5x - 2$

$$x_{1,2} = \frac{3{,}5 \pm \sqrt{(-3{,}5)^2 - 4 \times 2 \times -2}}{4} = \frac{3{,}5 \pm \sqrt{28{,}25}}{4}$$

Exact: $x_1 = \dfrac{3{,}5 - \sqrt{28{,}25}}{4}$ *en* $x_2 = \dfrac{3{,}5 + \sqrt{28{,}25}}{4}$

Afgerond : $x_1 = -0{,}454$ *en* $x_2 = 2{,}20$

Voor de extreme waarde geldt : $x = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{3{,}5}{4} = 0{,}875$



Er zijn geen oplossingen of snijpunten als : $(b^2 - 4ac) < 0$
Er is één oplossing en dus een raakpunt als : $(b^2 - 4ac) = 0$
Er zijn twee oplossingen of snijpunten als : $(b^2 - 4ac) > 0$
De term $(b^2 - 4ac)$ noemt men de discriminant (D).

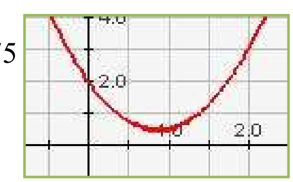
Het is verstandig om eerst D uit te rekenen.

Voorbeeld 2:

$f(x) = 2x^2 - 3{,}5x + 2 \rightarrow D = 3{,}5^2 - 4 \times 2 \times 2 = -3{,}75$

Het getal onder de wortel is negatief, dat kan niet, dus er zijn geen snijpunten.

De extreme waarde ligt bij : $x = \dfrac{3{,}5}{4} = 0{,}875$



2.7 Gelijkheden en ongelijkheden met kwadratische functie.

Voorbeeld 1: parabool en y-waarde
Voor welke waardes van x geldt: $2x^2 - 5x + 4 \le 3$

Blz. 48

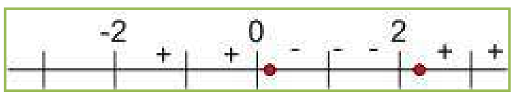
We rekenen eerst uit voor welke waardes van x de y-waarde gelijk is aan 3.

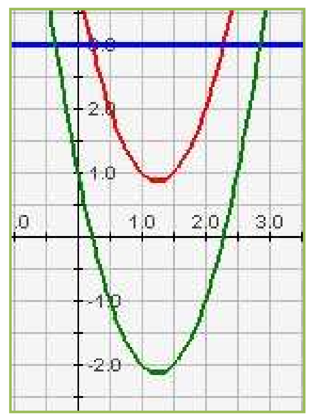
$2x^2 - 5x + 4 = 3 \quad \rightarrow \quad 2x^2 - 5x + 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 2 \times 1}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}$$
$$x_1 = 1{,}25 - \frac{\sqrt{17}}{4} \quad en \quad x_2 = 1{,}25 + \frac{\sqrt{17}}{4} \quad exact$$
$$x_1 = 0{,}22 \quad en \quad x_2 = 2{,}28 \quad afgerond$$

$2x^2 - 5x + 4 \le 3 \quad \rightarrow \quad 2x^2 - 5x + 1 \le 0$

Er is hier sprake van een dalparabool (a>0), dus tussen de snijpunten in geldt $y \le 0$. Je kunt dit ook aangeven in een tekenoverzicht.





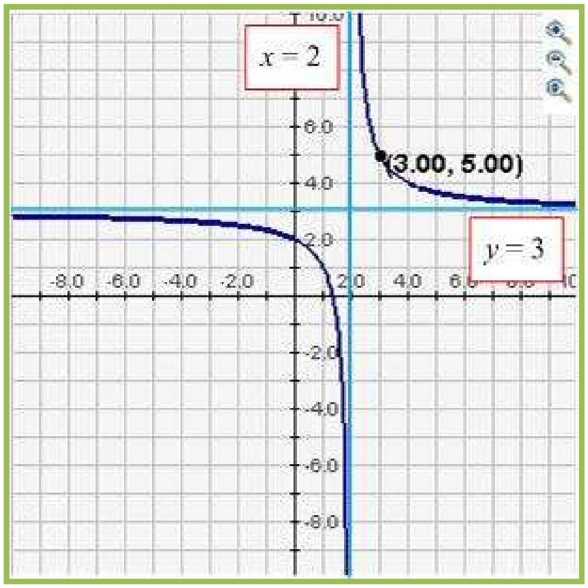
De groene grafiek hoort bij $(2x^2 - 5x + 1)$

3.2 Functievoorschrift opstellen bij bepaalde gegevens.

Voorbeeld 1:

Als je de asymptoten van een hyperbool kent en een punt waar deze doorheen gaat kun je het functievoorschrift opstellen en dus ook de grafiek tekenen.

Blz. 71



De asymptoten zijn $x = 2$ en $y = 3$.
De hyperbool gaat door het punt (3,5).

$$y = \frac{3x + b}{x - 2}$$
$$5 = \frac{3 \times 3 + b}{3 - 2} \rightarrow 5 = \frac{9 + b}{1} \rightarrow b = -4$$
$$y = \frac{3x - 4}{x - 2}$$
$$\text{of} \quad y = \frac{3(x-2) + 2}{x - 2} = 3 + \frac{2}{x - 2}$$

of

$$y = \frac{a}{x - 2} + 3$$
$$5 = \frac{a}{3 - 2} + 3 \rightarrow 2 = \frac{a}{1} \rightarrow a = 2$$
$$y = \frac{2}{x - 2} + 3$$
$$\text{of} \quad y = \frac{2 + 3(x-2)}{x - 2} = \frac{3x - 4}{x - 2}$$

Opgave 3.10 **Lineariseren**

Bij een biochemische reactie hangt de omzetsnelheid van een stof s af van de concentratie [s] volgens de vergelijking van Michaelis Menten

$$v = \frac{\mathrm{v}_{\max} \cdot [s]}{[s] + \mathrm{k}_{\mathrm{m}}} \; .$$

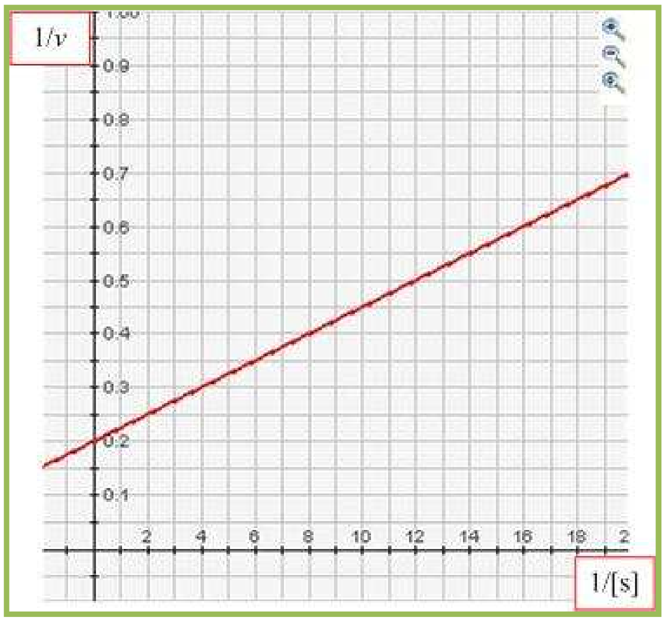
Blz. 77

Deze formule kun je ook schrijven als $\frac{1}{v} = \frac{1}{\mathrm{v}_{\max}} + \frac{\mathrm{k}_{\mathrm{m}}}{\mathrm{v}_{\max}} \cdot \frac{1}{[s]}$

a Leidt de formule voor $1/v$ af van de formule voor v.

b Schrijf de formule van $1/v$ als een functie $y(x)$ waarin $y = 1/\mathrm{v}$ en $x = 1/[s]$.

In onderstaande grafiek is $1/v$ op de y-as uitgezet en $1/[s]$ op de x-as.
v in µmol/s en s in µmol/L



c Bereken $v_{\max}$ en $\mathrm{k_m}$ m.b.v. de grafiek

3.2

R5 Welke gegevens heb je nodig om het functievoorschrift van een hyperbool op te stellen?

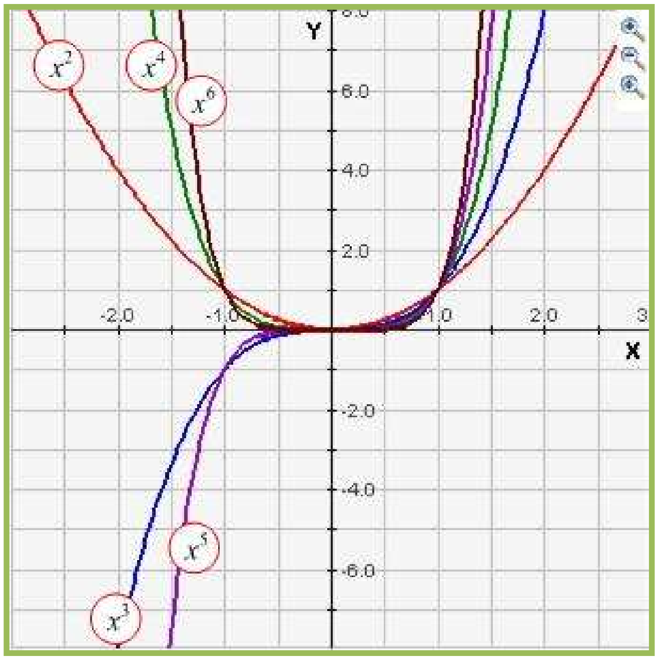
R6 Bij ongelijkheden (<, >, ≤, ≥) is een tekenoverzicht een handige tool. Leg m.b.v. een voorbeeld uit hoe dit werkt.

R7 Soms kun je de coëfficiënten van een hyperbolisch verband beter bepalen door de functie te lineariseren.
Laat dit zien m.b.v. de vergelijking van Michaelis Menten.

4.1 Functievoorschrift en grafiek bij machtsfuncties.

Blz. 89

Het meest algemene functievoorschrift is $f(x) = a \cdot x^b$ ($b \in \mathbb{N}$)



In het bovenstaande diagram zijn de grafieken van x^2, x^3, x^4, x^5 en x^6 afgebeeld. Hoe groter de exponent hoe steiler de grafiek.
De functies met een even macht zijn gespiegeld t.o.v. de y-as.
De functies met een oneven macht zijn gespiegeld t.o.v. het punt (0,0).

$(-2)^3$ is namelijk $-(2)^3$ en $(-2)^2$ is gelijk aan $(2)^2$

Verder gaan alle 'even' grafieken door (1,1) en (-1,1) en alle 'oneven' grafieken door (1,1) en (-1,-1).
Net zoals bij de voorgaande lineaire, kwadratische en gebroken functie kun je ook hier de functie vermenigvuldigen met een bepaalde factor en horizontaal en verticaal verschuiven.

Opgave 4.1 **Vermenigvuldigen en verschuiven.**

1.3

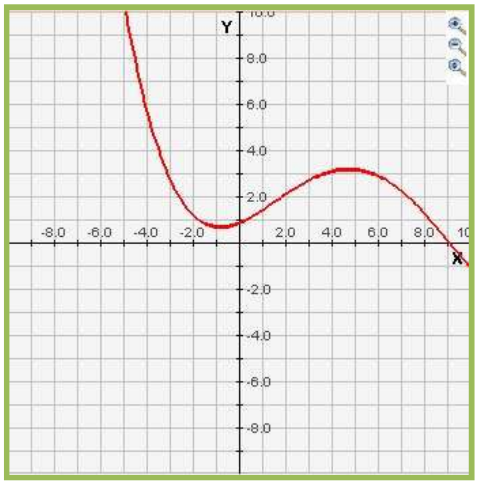
Beschrijf welke verschuiving en/of vermenigvuldiging de grafiek van de functie $f(x) = x^4$ heeft ondergaan.
Controleer met applet 1.3 .

a $g(x) = 2(x-2)^4 + 4$
b $h(x) = (x+1)^4 - 3$
c $k(x) = -3(x-1)^4$

Opgave 4.18 **Polynomen**

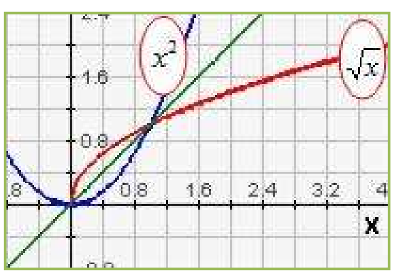
Blz. 104

a Bepaal de nulpunten van de polynoom $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2x$.
b Bepaal de nulpunten van de polynoom $g(x) = 2(x - 1)(x + 2)(x + 3)$
c Bereken het snijpunt van $g(x)$ met de y-as.
d In onderstaande figuur is met de applet 1.3 de grafiek getekend met het functievoorschrift ,verkregen via polynomische regressie met Excel in het voorbeeld hiervoor.
$y = 0{,}0021x^4 - 0{,}0458x^3 + 0{,}1879x^2 + 0{,}4058x + 0{,}87$
Verklaar het verschil met de grafiek in Excel!



4.8 Wortelfunctie is de inverse functie van de kwadratische functie.

Als $y = x^2$ dan $x = \sqrt{y}$
Vervolgens wordt y uitgezet op de horizontale as, dus y wordt x en andersom. Voor de inverse functie geldt dus: $y^{-1}(x) = \sqrt{x}$



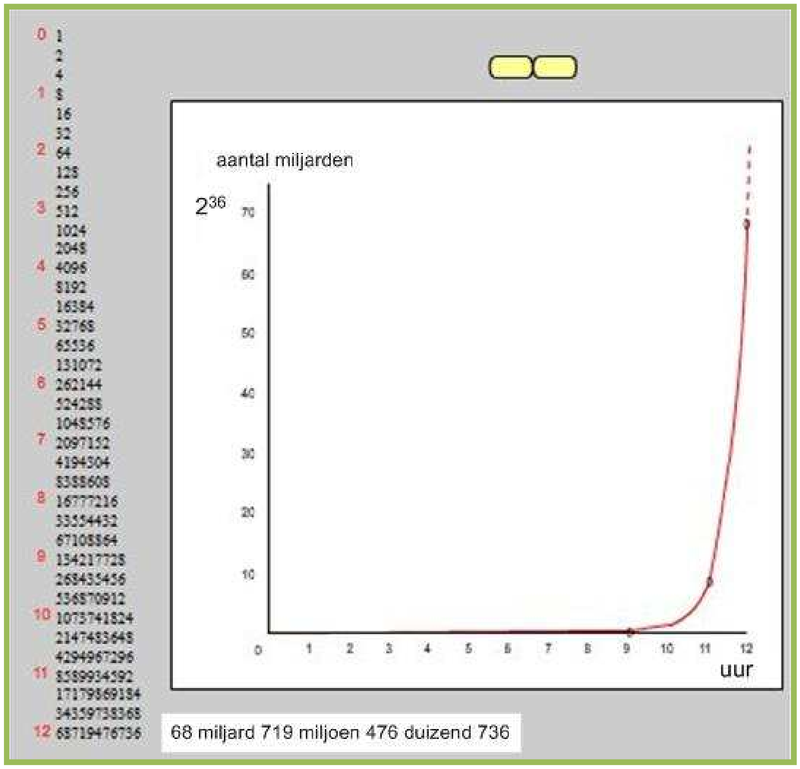
De grafiek van $f(x) = x^2$ en $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ zijn gespiegeld t.o.v. de lijn $y = x$.
Dit geldt uiteraard alleen voor het domein waarin de functies gedefinieerd zijn, dus voor $x \geq 0$.

Opgave 5.7 **Ook bacteriën groeien exponentieel.**

5.1

Blz. 116

Onderstaande grafiek is afkomstig van een biologie site over bacteriën.
Bij de juiste omstandigheden kunnen bacteriën zich iedere 20 minuten verdubbelen en zijn er na 12 uur ongeveer 70 miljard nakomelingen.



Na n delingen zijn er 2^n bacteriën voortgekomen uit 1 bacterie.
Dus $N(n) = N(0)\cdot 2^n$ N is het aantal bacteriën na n delingen.

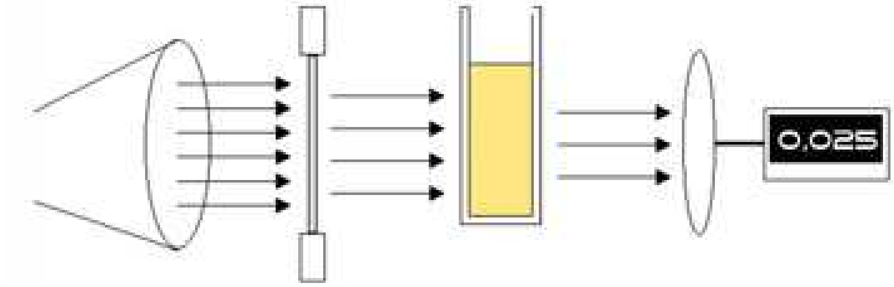
Je kunt ook schrijven: $N(t) = N(0)\cdot 2^{t/T_2}$
T_2 is de verdubbelingstijd of generatietijd, de tijd waarin een bacterie zich gedeeld heeft .
t is de tijd van de bacteriegroei, dus $n = t/T_2$

a $T_2 = 20$ min. Bereken het aantal verdubbelingen in 12 uur .
b Bereken het theoretisch aantal bacteriën afkomstig van 1 voorouder na 12 uur groei.

In werkelijkheid zal de groei van het aantal bacteriën minder zijn doordat er een tekort aan voedsel en vervuiling door eigen afvalstoffen.
In onderstaande afbeelding zijn twee grafieken te zien.
De rode grafiek hoort bij de theoretische groei. De verticale as is een ^{10}log-schaal zodat ook de afleesbaarheid veel beter is dan op de lineaire schaal hiervoor.

5.4 $^{10}\log(x)$ is de inverse functie van 10^x

Blz. 122



Bij een cuvet die gevuld is met een gekleurde oplossing zal een bepaald percentage van het opvallende licht geabsorbeerd worden. Als 50% van het licht door het cuvet gaat is de transmissie $T = 0{,}50$. Als de oplossing een 2x zo grote concentratie heeft zal er 50% van 50% doorgelaten worden. De transmissie is dan $T = 0{,}25$.

$0{,}50 = 10^{-0{,}301}$ en $0{,}25 = 10^{-0{,}602}$

Je ziet dat de exponent is dus evenredig met de concentratie.
Deze -exponent noemt men de extinctie E.
(Engels: A van absorbance)

$T = 10^{-E}$ of $E = -{}^{10}\log(T)$ ($^{10}\log$ wordt geschreven als log)
De extinctie (E) is evenredig met de concentratie (c).

$y = 10^{-x}$ of $x = -{}^{10}\log(y)$

Verwisselen van x en y levert de inverse functie $y^{-1} = -{}^{10}\log(x)$

Ander voorbeelden :

$$f(x) = y = 2x \rightarrow x = \frac{y}{2} = \frac{1}{2}\cdot y \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\cdot x$$
$$f(x) = y = x^2 \rightarrow x = \sqrt{y} \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

In de volgende figuur zijn de grafieken van de genoemde functies en de inverse afgebeeld.
$\log x$ is niet gedefinieerd voor $x \le 0$
$\sqrt{x}$ is niet gedefinieerd voor $x < 0$

? 5.1

WIMS-site : ***kies Vergelijkingen met $a^x = b$***

Voorbeeld 7:
Vergelijking met logaritmische functies.
Als je grondtal gelijk maakt zijn de argumenten gelijk aan elkaar.

Aanpak 1:

$$
\begin{aligned}
&{}^{2}\log(x+1)={}^{4}\log(x^2+2) \rightarrow {}^{4}\log(x+1)^2={}^{4}\log(x^2+2)\\
&\rightarrow (x+1)^2=x^2+2 \rightarrow x^2+2x+1=x^2+2\\
&\rightarrow 2x=1 \rightarrow x=0{,}5\\
&x>-1 \quad \text{dus oplossing is goed}
\end{aligned}
$$

Blz. 134

$${}^{2}\log(x+1)={}^{4}\log(x+1)^2 \quad \text{zoals} \quad {}^{2}\log a={}^{4}\log a^2$$

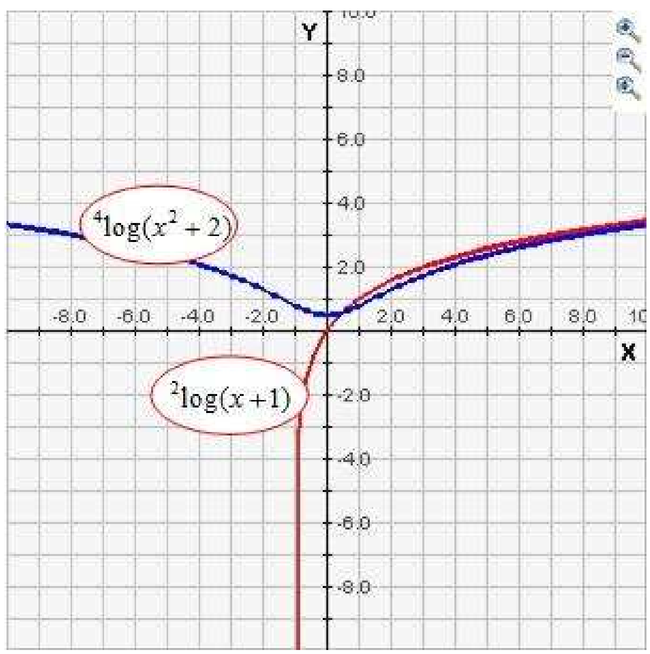
Je kunt ${}^{4}\log(x^2+2)$ ook schrijven als ${}^{2}\log(x^2+2)^{1/2}$

Aanpak 2:

$$\frac{\log(x+1)}{\log(2)}=\frac{\log(x^2+2)}{\log(4)} \rightarrow \log(x+1)=\frac{\log(x^2+2)}{2}$$

$$\rightarrow 2\log(x+1)=\log(x^2+2) \rightarrow (x+1)^2=x^2+2$$

Verder volgens aanpak 1.



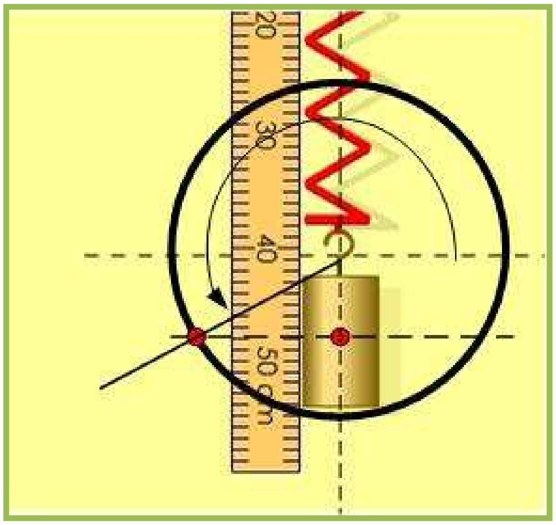
Snijpunt: (0,5; ${}^{2}\log(1{,}5)$) of afgerond (0,5;0,58)
De grafiek van ${}^{4}\log(x^2+1)$ bestaat ook voor $x < 0$.
De grafiek van ${}^{2}\log(x+1)$ bestaat voor x > -1 .

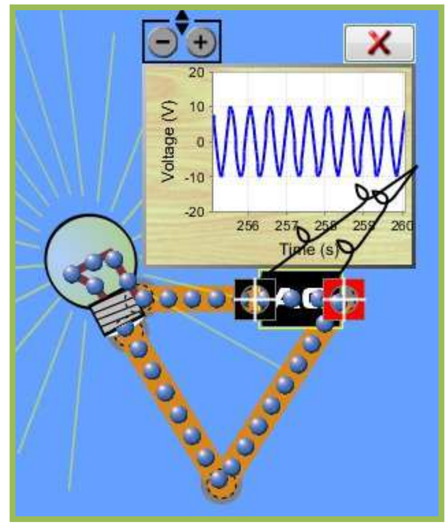
6.7

Blz. 152

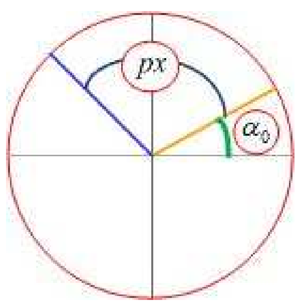
6.2 Goniometrische functies.

Bij iedere harmonische verandering, zoals druk bij geluid en spanning bij wisselstroom of de uitwijking van een massa aan een veer kun je verandering zien als de y-component (of x-component) van een punt dat over een cirkel kan ronddraaien.





$y(\alpha) = A\sin\alpha$ (α is de middelpuntshoek en y is de hoogte)
Je kunt voor de hoek α ook schrijven: $\alpha = px + \alpha_0$
Je krijgt dan het functievoorschrift $y(x) = A\sin(px + \alpha_0)$



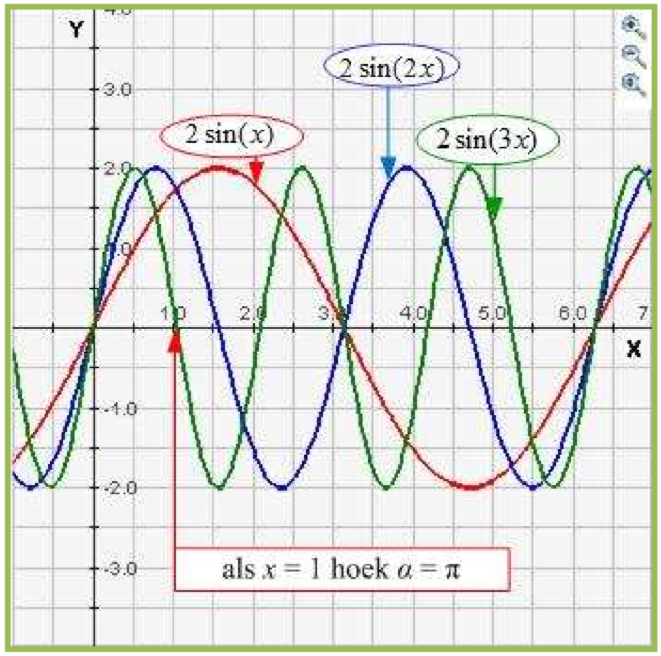
$$\boxed{p = \frac{2\pi}{periode}}$$

Als periode = π of 3,14 dan $p = 2$
p wordt frequentie genoemd.

Als $p = 2$ en x neemt toe met π dan neemt α toe met 2π rad.

Hieronder zijn de grafieken afgebeeld van $y_1 = 2\sin(x)$, $y_2 = 2\sin(2x)$ en $y_3 = 2\sin(3x)$.
Bij 2sin(x) is er 1 omwenteling of periode, bij 2sin(2x) zijn er twee periodes en bij 2sin(3x) zijn er drie periodes op een domein van 2π.

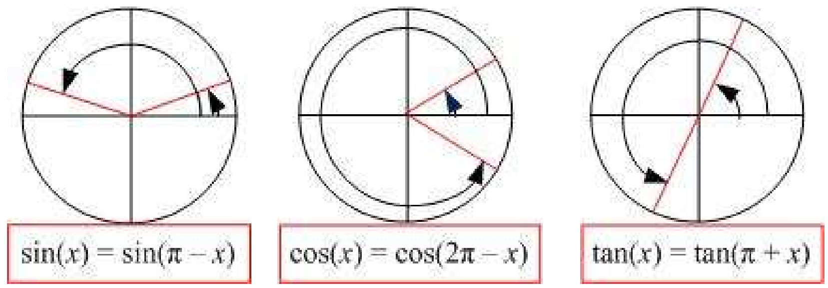
Dus p is het aantal periodes op 2π.



Hieronder zijn de grafieken afgebeeld van $y_1 = 2\sin(2x)$, $y_2 = 2\sin(2x+1)$ en $y_3 = 2\sin(2x+2)$.
Als $x = 0$ dan $y_1 = 0$, $y_2 = 2\sin(1)$ en $y_3 = 2\sin(2)$
α_0 is hoek als $x = 0$.

6.4 Gelijkheden en ongelijkheden met goniometrische functies.

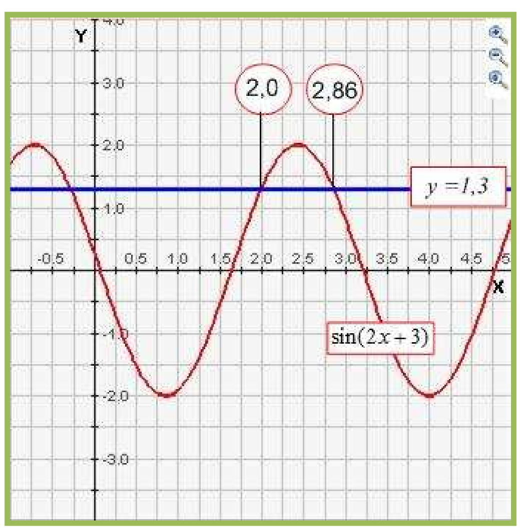
Blz. 168



Voorbeeld 1: $2\sin(2x+3) \geq 1{,}3$

Als $\sin(x) = \sin(\alpha) \rightarrow x = \alpha + k \cdot 2\pi \quad of \quad x = \pi - \alpha + k \cdot 2\pi$

$$
\begin{aligned}
&2\sin(2x+3) = 1{,}3\\
&\rightarrow \sin(2x+3) = 0{,}65 \quad \arcsin(0{,}65) = 0{,}708 \rightarrow \sin(0{,}71) = 0{,}65\\
&\rightarrow \sin(2x+3) = \sin(0{,}71) \quad of \quad \sin(2x+3) = \sin(\pi - 0{,}71)\\
&\rightarrow 2x_1 + 3 = 0{,}71 + k \cdot 2\pi \rightarrow 2x_1 = -2{,}29 + k \cdot 2\pi \rightarrow x_1 = -1{,}145 + \frac{k \cdot 2\pi}{2}\\
&\rightarrow x_1 = -1{,}145 + k \cdot \pi \rightarrow x_1 = 2{,}0 + k \cdot \pi \quad k \in Z\\
&\\
&\rightarrow 2x_2 + 3 = (\pi - 0{,}71) + k \cdot 2\pi \rightarrow 2x_2 = -0{,}568 + k \cdot 2\pi\\
&\rightarrow x_2 = -0{,}284 + \frac{k \cdot 2\pi}{2}\\
&\rightarrow x_2 = 2{,}86 + k \cdot \pi
\end{aligned}
$$

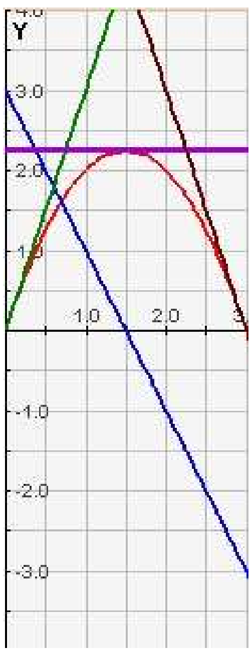


Oplossing: $2\sin(2x+3) \geq 1{,}3$ voor $2{,}0 < x < 2{,}86 \ (+\ k \cdot \pi)$

7.1 Wat is de betekenis van differentiëren?

Blz. 175

Bij het differentiëren van een functie of grafiek wordt een functie of grafiek afgeleid waarmee je kunt bepalen hoe sterk $f(x)$ verandert bij een bepaalde waarde van x. Met de afgeleide functie kun je de helling of r.c. bepalen bij een bepaalde waarde van x.



Voorbeeld uit bewegingsleer:
Een kogel wordt weggeschoten en volgt de rode kogelbaan.
Hiervoor geldt $y = -x^2 + 3x$ of $f(x) = -x^2 + 3x$
$f(x)$ is de afstand in verticale richting en x is de afstand in horizontale richting.

Door te differentiëren krijg je de afgeleide functie $f'(x) = -2x + 3$
Hiermee kun je voor iedere afstand de helling van de kogelbaan uitrekenen. De blauwe grafiek hoort bij de afgeleide functie ofwel de hellingsfunctie.

Bij het wegschieten ($x = 0$) is de r.c. volgens de blauwe grafiek 3.
De raaklijn aan de rode grafiek in $x = 0$ (groene lijn) heeft een r.c. van 3. Dit klopt dus met de blauwe grafiek!

Bij de top van de kogelbaan ($x = 1{,}5$) is de r.c. volgens de blauwe grafiek 0. De raaklijn aan de rode grafiek in $x = 1{,}5$ (paarse lijn) heeft een r.c. = 0. Dit klopt dus met de blauwe grafiek!

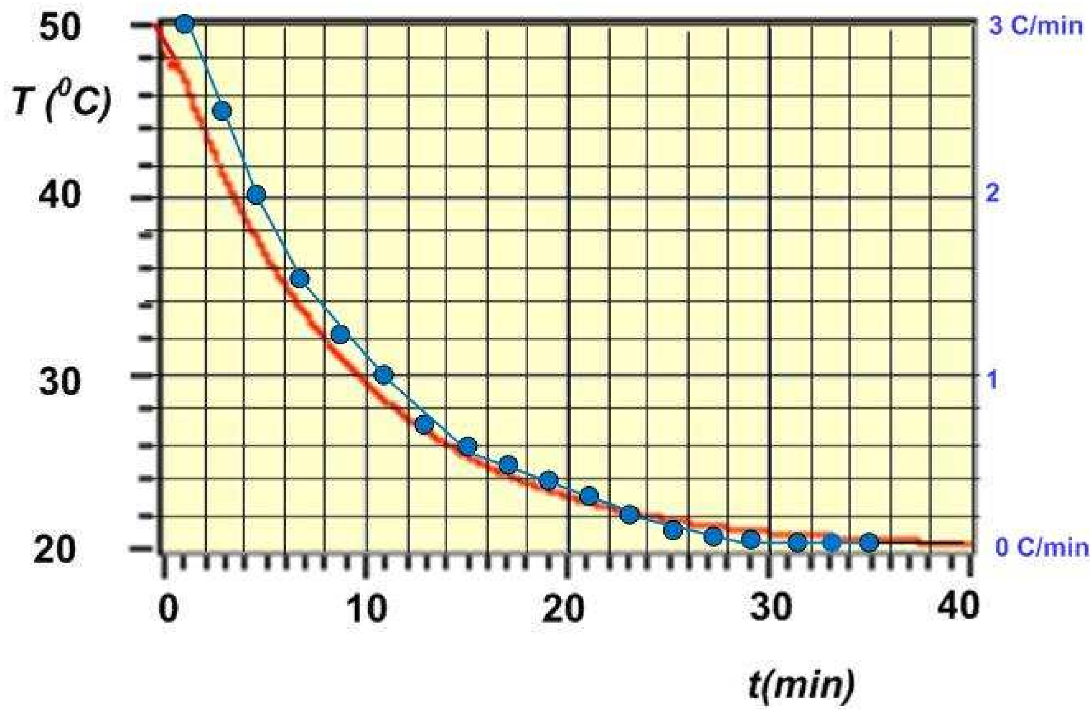
Bij het neerkomen ($x = 3$) is de r.c. volgens de blauwe grafiek -3.
De raaklijn aan de rode grafiek in $x = 3$ (bruine lijn) heeft een r.c. van -3. Ook dit klopt met de blauwe grafiek!

Als de x-as en de y-as een verschillende schaalverdeling hebben kun je beter spreken van de helling (slope)!

Het verloop van de kogelbaan is als volgt te beschrijven:
Van $x = 0$ tot 1,5 is sprake van afnemende stijging.
Van x = 1,5 tot 3 is sprake van toenemende daling.

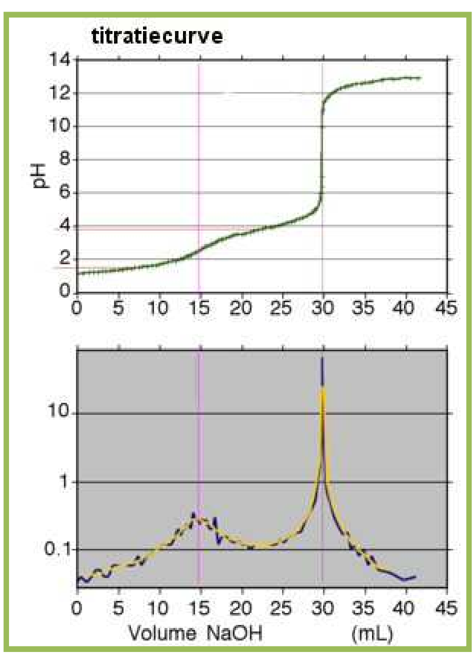
Voorbeeld uit warmteleer:

Blz. 176



In de bovenstaande grafiek is de temperatuut *T* van een afkoelend voorwerp uitgezet tegen de afkoeltijd *t* .De grafiek is afnemend dalend.
De blauwe curve is de afgeleide. De afname is vanaf 30 min bijna genaderd tot 0 ^{0}C/min.

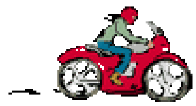
Voorbeeld uit chemie:



In de bovenste grafiek is de *pH* van een vloeistof uitgezet tegen het aantal ml NaOH dat toegevoerd is
In de onderste grafiek is de afgeleide uitgezet.
Bij 30 mL is er een piek in de verandering van de pH.
Omdat de helling zeer sterk veranderd is gekozen voor een logaritmische verticale as.

Blz. 177

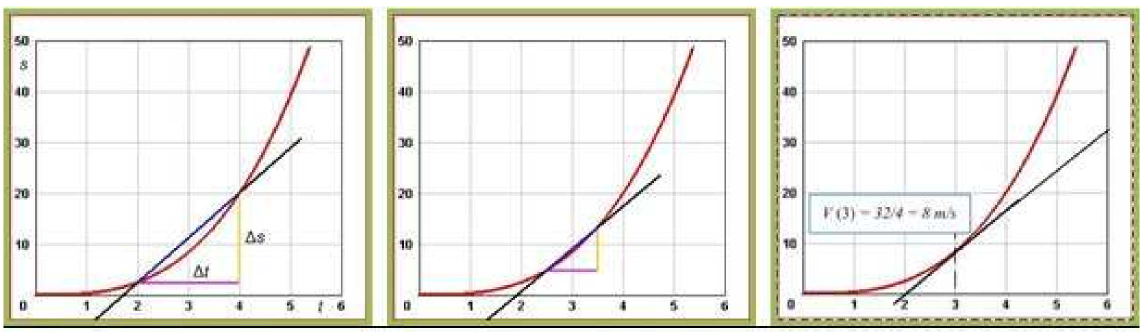
Voorbeeld met snelheid van optrekkende motor:



In de onderstaande grafieken is de afgelegde weg *s* (in m) vertikaal uitgezet tegen de tijd *t*.
De helling van de lijn door twee punten is hier de gemiddelde snelheid tussen twee tijdstippen. De helling van de raaklijn is de snelheid op een bepaald tijdstip.
Van links naar rechts wordt de gemiddelde snelheid uitgerekend rondom *t* = 3,0 s.

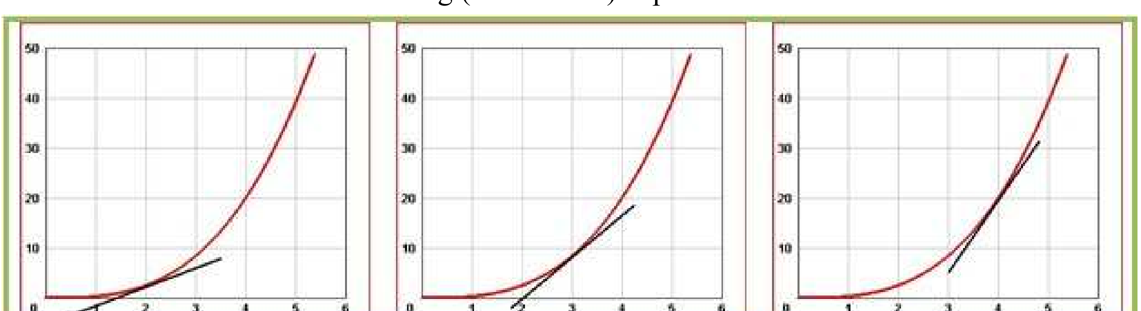
7.1

De helling (2;4) = 8,8 m/s. (gem. snelheid tussen 2 en 4 seconden).
De helling (2,5;3,5) = 8,4 m/s.
De helling van de raaklijn in *t* = 3 s is 8 m/s



helling $= \dfrac{17{,}6\ \text{m}}{2\ \text{s}} = 8{,}8\ \text{m/s}$	*helling* $= \dfrac{8{,}4\ \text{m}}{1{,}0\ \text{s}} = 8{,}4\ \text{m/s}$	*helling* $= \dfrac{32\ \text{m}}{4\ \text{s}} = 8\ \text{m/s}$

De helling van de raaklijn is eigenlijk de gemiddelde snelheid over een zeer korte, tot 0 s naderende, periode .
In de onderstaande grafiek is voor achtereenvolgens *t* = 2 s, *t* = 3 s en *t* = 4 s de helling (de snelheid) bepaald.



$v(2) = 3{,}78$ m/s	$v(3) = 8{,}36$ m/s	$v(4) = 14{,}44$ m/s

Blz. 178

Voor de gemiddelde snelheid geldt: $v_{\text{gem}} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

Voor de snelheid op een bepaald tijdstip geldt : $v(t) = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$

$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ noemt men het differentiequotiënt voor het interval Δt en is de gemiddelde steilheid.

$\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ noemt men het differentiaalquotiënt voor het tijdstip t en is de helling op een bepaald tijdstip.

(ds is Δs als deze naar 0 nadert ;dt is Δt als deze naar 0 nadert)

$$v = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)$$

Blz. 187

Rekenregels voor differentiëren.		
$f(x)$	$f'(x)$	
$c \cdot g(x)$	$c \cdot g'(x)$	c is een constante
$g(x) + h(x)$	$g'(x) + h'(x)$	
$g(x) \cdot h(x)$	$g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$	*productregel*
$\dfrac{g(x)}{h(x)}$	$\dfrac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{(h(x))^2}$	*quotiëntregel*
$f(u)$ *en* $u = g(x)$	$f'(u) \cdot u'(x)$	*kettingregel*

Enkele voorbeelden:

Voorbeeld 1

$$f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 12 \rightarrow f'(x) = 9x^2 - 12x$$

Voorbeeld 2 quotiëntregel

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - h'(x) \cdot g(x)}{((h(x))^2} \rightarrow f'(x) = \frac{2 \cdot x^2 - 2x \cdot (2x+1)}{x^4} = \frac{-2x^2 - 2x}{x^4}$$

$$\rightarrow f'(x) = \frac{-2x^2 - 2x}{x^4} = \frac{-2x-2}{x^3} \quad x \neq 0$$

7.5 Wat is de betekenis van de tweede afgeleide?

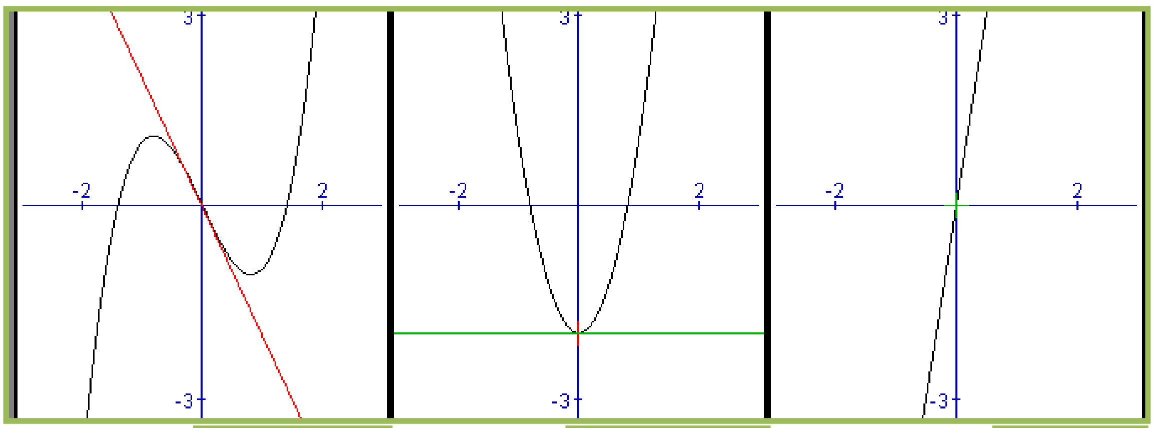
Blz. 193

De eerste afgeleide $f'(x)$ of $\frac{dy}{dx}$ of $\frac{df(x)}{dx}$ geeft de richting aan van de raaklijn aan de grafiek van $f(x)$ op de plaats x.
Als $f'(x)=0$ is er sprake van een extreme waarde. De grafiek heeft dan een minimum of een maximum.
Als je $f'(x)$ nogmaals differentieert krijg je de een functie die informatie geeft over de verandering van de helling van de originele grafiek.

De tweede afgeleide $f''(x)$ of $\frac{d^2y}{dx^2}$ of $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ geeft de richting aan van de raaklijn aan de grafiek van $f'(x)$ op de plaats x.

7.11

Als $f''(x)=0$ is er geen verandering van de helling van de raaklijn. De hellingsverandering gaat van meer negatief naar meer positief. Er is sprake van een buigpunt.



$f(x)=x^3-2x$ $\quad$ $f'(x)=3x^2-2$ $\quad$ $f''(x)=6x$

$f'(x)=3x^2-2$

$f'(x)=0$ levert twee snijpunten op met de x-as en dus twee extreme waardes: voor $x_1=\sqrt{\frac{2}{3}}$ en voor $x_2=-\sqrt{\frac{2}{3}}$

afgerond: $x_1=0{,}816 \quad en \quad x_2=-0{,}816$

$f''(x)=6x$
$f''(x)=0$ levert één snijpunt op met de x-as en dus een buigpunt voor $x=0$.