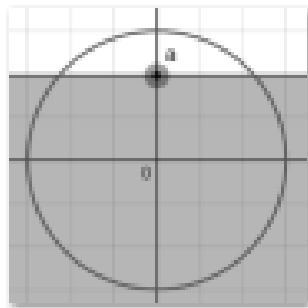
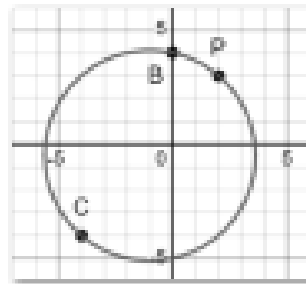


# Examentraining met Desmos-tools

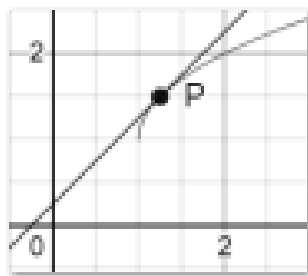
## Wiskunde B, VWO



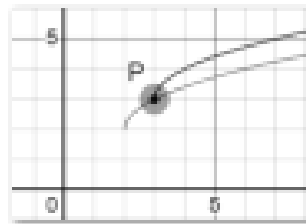
2018-2 antw4



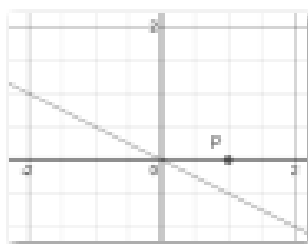
2018-2 antw8



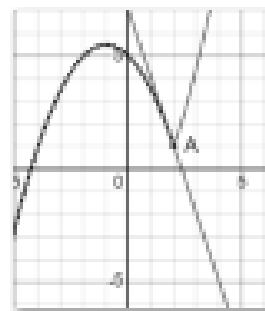
2019-1 antw3



2019-1 antw4



2019-2 antw3



2019-2 antw4

# Inhoudsopgave

1. Examenopgaven
2. Uitwerkingen examenopgaven met QR-codes voor Desmos-tools

| Domein                                  | Subdomein  | in CE | moet in SE | mag in SE |
|---|--|-------|------------|-----------|
| A Vaardigheden                          |  | X     | X          |           |
| B Functies, grafieken en vergelijkingen |  | X     |            | X         |
| C Differentiaal- en integraalrekening   |  | X     |            | X         |
| D Goniometrische functies               |  | X     |            | X         |
| E Meetkunde met coördinaten             | E1: Meetkundige vaardigheden                     | X     | X          |           |
|   | E2: Algebraïsche methoden in de vlakke meetkunde | X     |            | X         |
|   | E3: Vectoren en inproduct                        | X     |            | X         |
|   | E4: Toepassingen                                 | X     |            | X         |
| F Keuzeonderwerpen                      |  |       | X          |           |








## VERANTWOORDING

Deze examenbundel bevat de examenopgaven en de uitwerkingen van het examen wiskunde B VWO van 2018-1/ 2018-2/ 2019-1 /2019-2/ 2021-1/ 2021-2/ 2022-1. Het bijzondere hierbij is dat de uitwerkingen ondersteund worden door tools gemaakt met het programma Desmos. Dit programma is erg gebruiksvriendelijk en zeker ook geschikt om door leerlingen gebruikt te worden. Het controleren van de uitwerking kan daardoor op een interactieve manier gedaan worden. De meest ideale leeromgeving bestaat uit deze examenbundel en een laptop met de interactieve tools. De uitwerkingen in de bundel bevatten QR-codes. Deze kun je scannen met je smartphone en via bijvoorbeeld Whatsapp doorsturen naar je laptop of de laptop van je medeleerling(en).

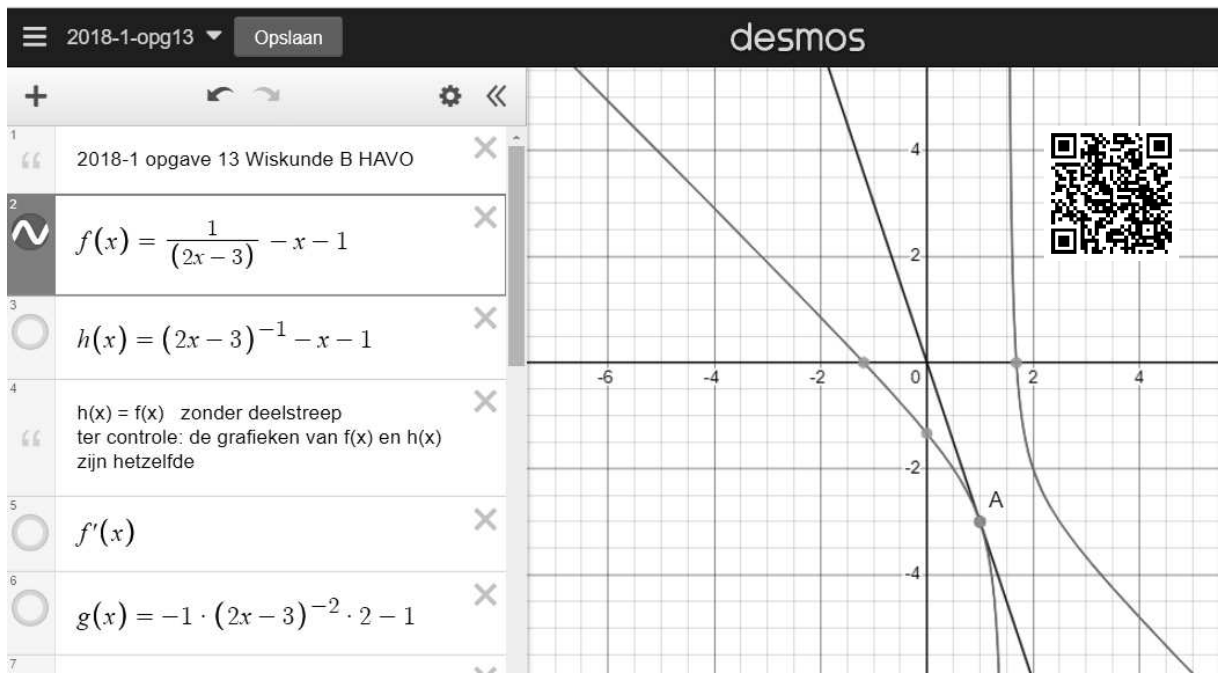
Succes met deze interactieve aanpak,

Jos Vervoort

## WERKEN MET DESMOS

|   |   |   |  |
|---|---|---|--|
| 1 | “ 2018-1 opgave 13 Wiskunde B HAVO  | × | <b>Regel 1</b><br><b>naam van de opgave</b>  |
| 2 |  $f(x) = \frac{1}{(2x-3)} - x - 1$           | × | Regel 2<br>functie $f(x)$<br>rechts verschijnt de grafiek van $f(x)$   |
| 3 |  $h(x) = (2x-3)^{-1} - x - 1$                | × | Regel 3<br>Door $f(x)$ te herleiden tot deze vorm kun je deze beter differentiëren. Door op het icoon te klikken kun je de grafiek van $h(x)$ zien. Als de herleiding correct is overlappen de grafieken elkaar. |
| 4 | “ $h(x) = f(x)$ zonder deelstreep<br>ter controle: de grafieken van $f(x)$ en $h(x)$ zijn hetzelfde                           | × | Regel 4<br>Uitleg van regel 3  |
| 5 |  $f'(x)$                                   | × | Regel 5<br>De grafiek van $f'(x)$ , de afgeleide van $f(x)$<br>Deze wordt hierna gebruikt om de controleren of je $f'(x)$ correct hebt afgeleid.   |
| 6 |  $g(x) = -1 \cdot (2x-3)^{-2} \cdot 2 - 1$ | × | Regel 6<br>Door jou bepaalde afgeleide van $f(x)$<br>$g(x) = h'(x) = f'(x)$<br>Gebruik grafiek regel 5 voor controle.  |
| 7 | “ $g(x)$ is de afgeleide van $h(x)$ of $f(x)$<br>$g(x) = f'(x)$   | × | Regel 7<br>Uitleg van regel 6  |
| 8 |  $k(x) = -\frac{2}{(2x-3)^2} - 1$          | × | Regel 8<br>Herleiding van $g(x)$ tot vorm met deelstreep.<br>Gebruik grafiek regel 5 voor controle.  |
| 9 | “ herleiding $g(x)$<br>$k(x) = g(x) = f'(x)$  | × | Regel 9<br>Uitleg regel 8  |

|    |  |   |  |
|----|--|---|--|
| 10 | $f'(1)$<br><input type="text" value="= -3"/>   | ✗ | Regel 10<br>Waarde van $f'(1)$ , de rc van raaklijn in $A(x=1)$ , door deze tool berekend.<br>$f'(1) = -3$ |
| 11 | $g(1)$<br><input type="text" value="= -3"/>  | ✗ | Regel 11<br>Waarde van $g(1)$ ter controle.<br>$g(1) = f'(1) = -3$   |
| 12 | “ rc van raaklijn in $A(x=1)$ -3   | ✗ | Regel 12<br>Uitleg regel 11  |
| 13 | <input type="radio"/> $y = -3x + b$  | ✗ | Regel 13<br>Vergelijking raaklijn in $A$ rc = -3 en b moet nog bepaald worden                              |
| 14 | “ vergelijking raaklijn k door $A$ rc = -3 en b moet nog bepaald worden                          | ✗ | Regel 14<br>Uitleg regel 13  |
| 15 | $b = -3 + 3 \cdot 1$<br><input type="text" value="b = 0"/>                                       | ✗ | Regel 15<br>Raaklijn gaat door $A(1,-3)$<br>$b = 0$<br>$x = 1$ en $y = -3$ ingevuld                        |
| 16 | “ punt $A(1,-3)$ ligt op lijn k  | ✗ | Regel 16<br>Uitleg regel 15  |
| 17 | <input type="radio"/> $y = -3x$  | ✗ | Regel 17<br>Vergelijking raaklijn in punt $A$ aan $f$  |
| 18 | <input checked="" type="radio"/> $(1,-3)$<br><input checked="" type="checkbox"/> Label: <u>A</u> | ✗ | Regel 18<br>Punt $A$ afbeelden in grafiek  |



## Gebruik grafische rekenmachine:

### De rekenmachine

Bij berekeningen kun je in veel gevallen je rekenmachine gebruiken. Je krijgt dan in het algemeen geen exacte antwoorden maar benaderingen.

Je kunt met je rekenmachine:

- grafieken plotten en tabellen maken
- de toppen van een grafiek vinden
- de snijpunten van grafieken vinden
- vergelijkingen oplossen
- de helling van een grafiek in een punt benaderen
- een hellingsgrafiek plotten

Bij gebruik van je rekenmachine geef je aan hoe je de rekenmachine hebt gebruikt. Daarbij neem je de volgende onderdelen op:

Invoer, Vensterinstelling en de gebruikte Opties.

Als in de opdracht staat: Bereken... of: Los op..., dan heb je de keuze tussen algebraïsch oplossen en oplossen met de rekenmachine.

Als in de opdracht staat : Bereken algebraïsch...of: Los exact op dan moet je het probleem met algebra oplossen. Als je een probleem exact moet oplossen, dan moet het antwoord exact zijn. Moet je een probleem algebraïsch oplossen dan mag het antwoord benaderd worden.

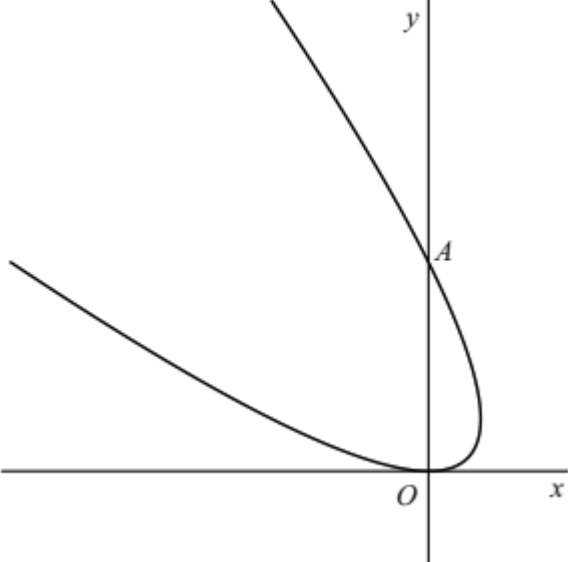
ONDERWERP / OPGAVENUMMER/ DOMEIN / BLZ

|               |   |          |           |    |
|---------------|---|----------|-----------|----|
| <b>2018-1</b> | Bewegend punt                               | 1-2      | C / E     | 10 |
|               | Lijn door de toppen                         | 3-4-5    | B / C     | 12 |
|               | Zwaartepunt en rakende cirkels              | 6-7      | B / E     | 15 |
|               | Maxima en minima                            | 8-9      | C / D     | 17 |
|               | Sheffield Winter Garden                     | 10-11    | B         | 19 |
|               | Natuurlijke logaritme van de wortel         | 12-13-14 | B / C     | 22 |
|               | Vierkant onder grafiek                      | 15       | B         | 24 |
|               | Twee vierkanten op een kwart cirkel         | 16-17    | E         | 26 |
| <b>2018-2</b> | Loodrecht in de perforatie                  | 1-2      | B / C     | 29 |
|               | Ijsbol                                      | 3-4-5    | B / C     | 31 |
|               | Constante verhouding                        | 6-7      | B / C     | 34 |
|               | Gekanteld vierkant                          | 8-9-10   | B / E     | 36 |
|               | Anderhalf keer zo groot                     | 11       | B / C     | 40 |
|               | Baan  | 12-13-14 | D / E     | 42 |
|               | Buiten een vierkant                         | 15-16    | E         | 45 |
| <b>2019-1</b> | Lijnen door de oorsprong en een cirkel      | 1        | B / E     | 47 |
|               | Rechts van het snijpunt                     | 2        | C         | 48 |
|               | Altijd raak                                 | 3-4-5    | B / C     | 50 |
|               | Slingshot                                   | 6-7      | B         | 52 |
|               | Een logaritmische functie en haar afgeleide | 8-9      | B / C     | 55 |
|               | Gebroken goniometrische functie             | 10-11-12 | B / C     | 57 |
|               | Driehoek met bewegend hoekpunt              | 13-14    | B / E     | 58 |
|               | Afgeknotte paraboloid                       | 15       | B / C     | 63 |
| <b>2019-2</b> | Minimale lengte                             | 1        | B / C     | 65 |
|               | Bewegend punt                               | 2-3      | B / C / E | 67 |
|               | Raaklijn in knikpunt                        | 4        | B / C     | 69 |
|               | Optimale snijsnelheid                       | 5-6-7    | B / C     | 71 |
|               | Oppervlak onder een sinusgrafiek            | 8-9      | C / D     | 75 |
|               | Horizontale en verticale asymptoot          | 10       | B         | 77 |
|               | Wind aan zee                                | 11-12    | E         | 79 |
|               | Twee logaritmische functies                 | 13-14-15 | B         | 82 |
|               | Parabool en cirkel met variabele straal     | 16-17    | C / E     | 85 |



|               |   |          |           |     |
|---------------|---|----------|-----------|-----|
| <b>2021-I</b> | Parabool en twee lijnen                 | 1        | B / C     | 88  |
|               | Goniometrische functies                 | 2-3-4    | C / D     | 90  |
|               | Aardbevingen                            | 5-6-7    | B / E     | 93  |
|               | Een vierkant en vier sectoren           | 8-9      | E         | 97  |
|               | Limiet van een verhouding               | 10       | B / E     | 100 |
|               | Gebroken functie met een parameter      | 11-12    | B / C     | 102 |
|               | Absolute natuurlijke logaritme          | 13       | B         | 104 |
|               | P en P'                                 | 14       | B / E     | 105 |
| <b>2021-2</b> | Kromme K                                | 1-2-3    | B / C / E | 107 |
|               | Vectoren spiegelen                      | 4-5      | E         | 109 |
|               | Raaklijnen bij een vierdegraads functie | 6-7      | B / C     | 111 |
|               | Bankenformules                          | 8-9-10   | B / C     | 113 |
|               | Twee wortelgrafieken                    | 11-12    | B / C     | 116 |
|               | Asymptoten en raaklijnen                | 13-14    | B / C     | 119 |
|               | Driehoek in cirkel                      | 15-16    | B / C     | 121 |
| <b>2022-I</b> | Inverse van $\ln(x)$                    | 1-2-3    | B / C     | 123 |
|               | Letter op computerbeeldscherm           | 4-5-6-7  | B / C / E | 125 |
|               | Gebroken sinusfunctie                   | 8        | C / D     | 126 |
|               | Raaklijn verschuiven                    | 9-10-11  | B / C     | 131 |
|               | Vulkaan                                 | 12-13-14 | B / D / E | 134 |
|               | Scheve asymptoot                        | 15       | B / C     | 137 |
|               | Vlieger                                 | 16-17    | E         | 139 |

## Opgaven/uitwerkingen 2018-I

|    |   | 2018-I <b>Bewegend punt</b>  | C / E   |
|----|---|--|---|
| 4p | 1 | <p>De beweging van een punt <math>P</math> wordt gegeven door de volgende bewegingsvergelijkingen:</p> $\begin{cases} x(t) = 1 - t^2 \\ y(t) = (1 + t)^2 \end{cases}$ <p>In de figuur is de baan van <math>P</math> weergegeven.</p>   | <p><b>figuur</b></p>  |
| 4p | 2 | <p>De baan van <math>P</math> snijdt de <math>y</math>-as in de oorsprong <math>O</math> en in punt <math>A</math>. Zie de figuur. Bereken exact de snelheid waarmee <math>P</math> door punt <math>A</math> gaat.</p> <p>Voor elke waarde van <math>t</math> bevindt <math>P</math> zich op de kromme met vergelijking:</p> $(x + y)^2 = 4y$ <p>Bewijs dit.</p> |   |

|    |   | 2018-I   | Bewegend punt | B / C / E |   |   |   |   |
|----|---|--|---------------|-----------|---|---|---|---|
| 4p | 1 | $x(t) = 1 - t^2$<br>$y(t) = (1 + t)^2$<br>in punt A: $x = 0$<br>$1 - t^2 = 0$ geeft $t = -1 \vee t = 1$<br>$y(-1) = 0$ dus bij punt A hoort $t = 1$<br>$\frac{dx}{dt} = -2t$ en $\frac{dy}{dt} = 2(1+t)$<br>$[\frac{dx}{dt}]_{t=1} = -2$ en $[\frac{dy}{dt}]_{t=1} = 4$<br>snelheid is $(\sqrt{(-2)^2 + (4)^2} =) \sqrt{20}$ (of $2\sqrt{5}$ ) |               |           | 1 | 1 | 1 | 1 |
|    |   |  |               |           |   |   |   |   |
| 4p | 2 | $(x + y) = (1 - t^2 + (1 + t)^2)$<br>$(x + y) = 2 + 2t$<br>$(x + y) = 2(1 + t)$<br>$(x + y)^2 = 4(1 + t)^2$<br>$4(1 + t)^2 = 4y$<br>dus $(x + y)^2 = 4y$   |               |           | 1 | 1 | 1 |   |
|    |   |  |               |           |   |   |   |   |

**2018-I Lijn door de toppen B / C**

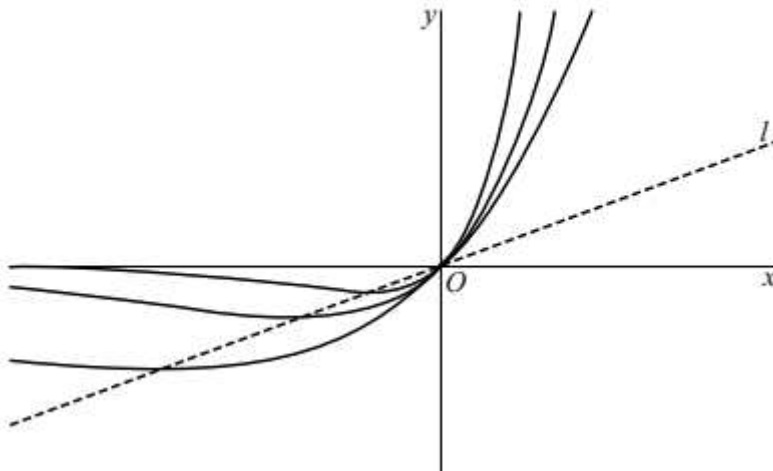
Voor elke waarde van  $a$  met  $a > 0$  wordt de functie af gegeven door  $f_a(x) = xe^{ax}$

De afgeleide functie  $f'_a$  wordt gegeven door  $f'_a(x) = e^{ax} + axe^{ax}$ .

In figuur 1 zie je voor een aantal waarden van  $a$  de grafiek van  $f_a$ .

Ook is de lijn  $l$  met vergelijking  $y = \frac{1}{e}x$  weergegeven.

**figuur 1**



4p

3

Voor elke waarde van  $a$  met  $a > 0$  heeft de grafiek van af precies één top. Bewijs dat deze top op lijn  $l$  ligt.

De functie  $F_a$  is gegeven door:

$$F_a(x) = \frac{1}{a}xe^{ax} - \frac{1}{a^2}e^{ax}$$

$F_a$  is een primitieve van  $f_a$ .

3p

4

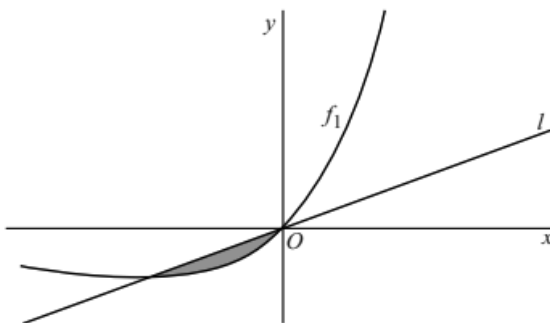
Bewijs dat  $F_a$  inderdaad een primitieve van  $f_a$  is.

Voor  $f_1$  geldt  $f_1(x) = xe^x$ .

In figuur 2 is de grafiek van  $f_1$  getekend, en ook lijn  $l$ .

Het vlakdeel tussen lijn  $l$  en de grafiek van  $f_1$  is grijs gemaakt.

**figuur 2**



5p

5

Bereken exact de oppervlakte van het grijze vlakdeel.

**2018-I Lijn door de toppen B / C**

4p 3

$$f_a(x) = xe^{ax}$$

$$f'_a(x) = e^{ax} + axe^{ax}$$

$$f'_a(x) = e^{ax}(1+ax)$$

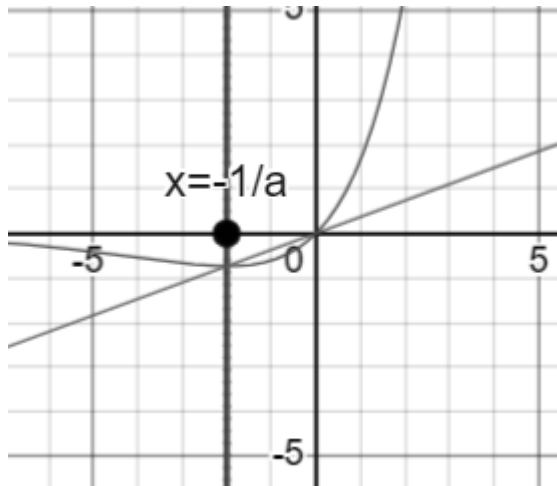
$$f'_a(x) = 0$$

$$1+ax = 0 \quad (e^{ax} \neq 0)$$

$$x = -\frac{1}{a} \quad (x\text{-coördinaat top})$$

$$(y\text{-coördinaat top}) \quad y = f_a\left(-\frac{1}{a}\right) = -\frac{1}{a} \cdot e^{-1} = \frac{1}{e} \cdot -\frac{1}{a}$$

dus top ligt op lijn  $y = \frac{1}{e} \cdot x$



1  
1  
1  
1  
3

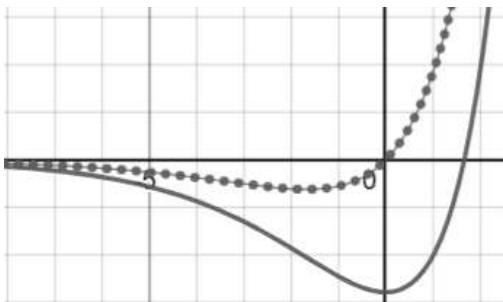
3p 4

$$f_a(x) = xe^{ax}$$

$$F_a(x) = \frac{1}{a}xe^{ax} - \frac{1}{a^2}e^{ax}$$

$$F'_a(x) = \frac{1}{a}(e^{ax} + axe^x) - a \cdot \frac{1}{a^2} \cdot e^{ax} = \frac{1}{a}e^{ax} + xe^x - \frac{1}{a}e^{ax} = xe^{ax}$$

$$F'_a(x) = f'_a(x)$$



5p

5

$$f_1(x) = xe^x$$

$$l: g(x) = \frac{1}{e}x$$

$x$ -coördinaten snijpunten  $f_1$  en  $l$ :

$$xe^x = \frac{1}{e}x$$

$$\text{geeft } x = 0 \vee e^x = e^{-1}$$

$$e^x = e^{-1} \text{ geeft } x = -1$$

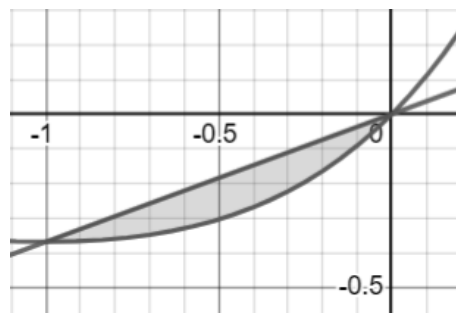
$$x = 0 \vee x = -1$$

$$O(V) = \int_{-1}^0 \left( \frac{1}{e}x - xe^x \right) dx$$

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{e}x dx = \left[ \frac{1}{2e}x^2 \right]_{-1}^0 = -\frac{1}{2e}$$

$$\int_{-1}^0 xe^x dx = \left[ xe^x - e^x \right]_{-1}^0 = -1 - (-1 \cdot e^{-1} - e^{-1}) = -1 + \frac{2}{e}$$

$$O(V) = -\frac{1}{2e} - \left( -1 + \frac{2}{e} \right) = 1 - \frac{1}{2e} - \frac{2}{e} = 1 - \frac{5}{2e}$$

1  
1

1

1

1