Uitwerkingen R-vragen hoofdstuk 5

5. Exponentiële en logaritmische functies.

5.1

R1 Wat is het verschil tussen een machtsfunctie en een exponentiële functie?
Bij een machtsfunctie is het grondtal de variabele.
Voorbeeld: $f(x) = 2x^3$
Bij een exponentiële functie is de exponent de variabele.
Voorbeeld: $f(x) = 3^x$

R2 Wat is het verschil tussen de grafiek van 2^x en -2^x ?
2^x heeft de tegenovergestelde waarde van -2^x.
Als $2^x = 3$ dan $-2^x = -3$

De functie $(-2)^x$ niet gedefinieerd omdat a^x niet gedefinieerd is als a < 0 en *x een gebroken getal is.*
$(-2)^{10}$ bestaat wel en $(-2)^{10{,}1}$ niet.

R3 Waarom is 2^{x+1} hetzelfde als $2{\cdot}2^x$?
$2^{x+1} = 2^1 \times 2^x = 2 \cdot 2^x$

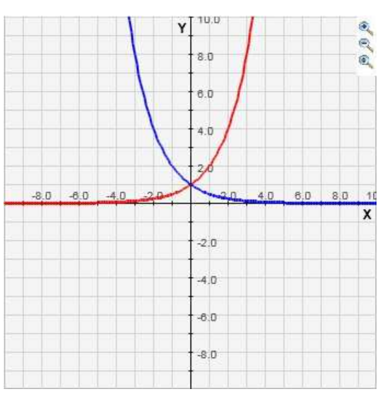
Als je de grafiek van 2^x een schaaldeel naar rechts verschuift krijg je de grafiek van $2^x/2$.
De grafiek van $2^{(x-1)}$ is 1 schaaldeel narr rechts verschoven t.o.v. de grafiek van 2^x.

$$2^{(x-1)} = \frac{2^x}{2^1} = 2^x\!/_2$$

Waarom is 4^x hetzelfde als $(2^x)^2$?
$4^x = (2^2)^x = (2^x)^2 = 2^{2x}$

Als $2^x = 10$ dan $2^{-x} = 0{,}1$ Waarom?
$2^x = 10 \rightarrow (2^x)^{-1} = 10^{-1} \rightarrow 2^{-x} = 0{,}1$

R4 Zijn 2^x en 2^{-x} reciproke functies?
$\frac{1}{2^x} = 2^{-x}$ Dus 2^x en 2^{-x} zijn reciproke functies
Als $2^x = 3$ dan $2^{-x} = \frac{1}{3}$



R5 De grafiek van $2{\cdot}2^x + 2$ krijg je als de grafiek van 2^x een factor 2 uitgerekt wordt en vervolgens 2 schaaldelen naar boven verschoven wordt.

5.2

R6 Waarom gaan alle grafieken van $f(x) = a^{bx}$ door het punt (0; 1)?

$a^{bx} = a^0 = 1$ ongeacht de waarde van a en b

R7 $\log(x)$ of ${}^{10}\log(x)$ is de exponent bij het grondtal 10 zodat je de waarde $\boldsymbol{x}$ krijgt. Dus $10^{\log(x)} = x$

R8 $3\log(x) = 3\times{}^{10}\log(x)$ $3\log(x)$ en ${}^{3}\log(x)$ is de exponent bij het grondtal 3 om de waarde $\boldsymbol{x}$ te krijgen.

Waarom is $\log(x^3) = 3\cdot\log(x)$?

De exponent van x^3 is 3× zo groot als de exponent van x^1

R9 De grafiek van $-\log(x^3)$ is gespiegeld t.o.v. de grafiek van $\log(x^3)$.

Dit is een spiegeling t.o.v. de x-as

$-\log(x^3)$ is hetzelfde als $\log(x^{-3})$ Waarom?

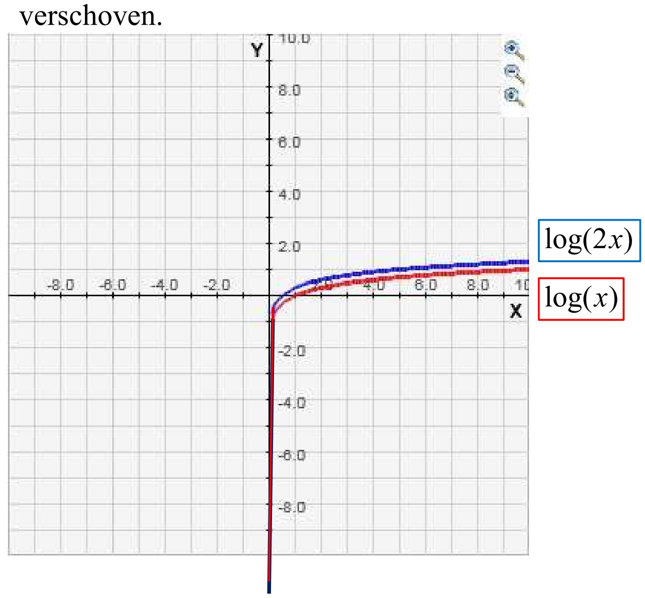
$-\log(x^3) = \log(x^3)^{-1} = \log(x^{-3})$

R10 $\log(2x) = \log(x) + \log(2)$

$$\boxed{\begin{aligned}&2x = 2\times x\\&10^{\log(2x)} = 10^{\log(2)}\times 10^{\log(x)} = 10^{\log(2)+\log(x)}\\&\log(2x) = \log(x) + \log(2)\end{aligned}}$$

Wat is het verschil in grafiek tussen $\log(x)$ en $\log(2x)$?

De grafiek van $y = \log(2x)$ heeft dezelfde vorm als de grafiek van $y = \log(x)$, alleen is deze $\log(2) = 0{,}3$ schaaldeel naar boven verschoven.

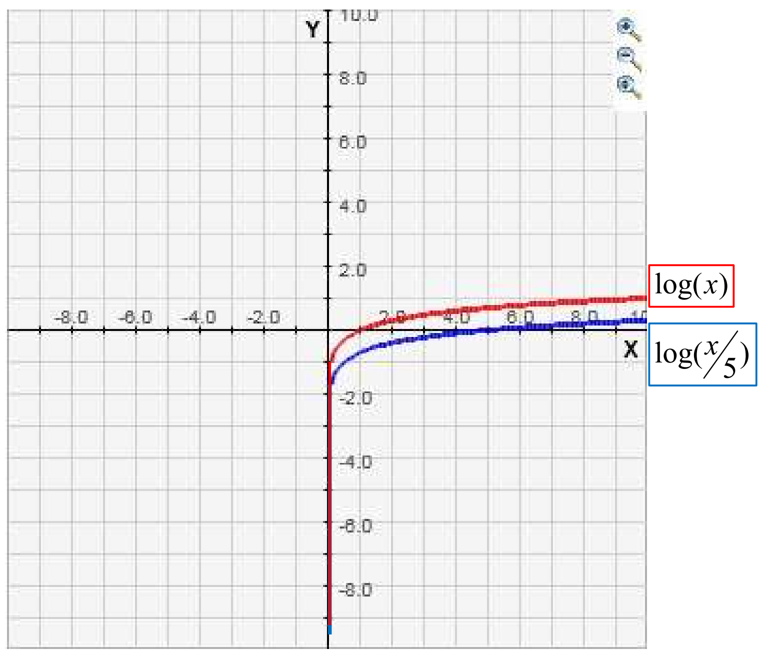


R11 $\log(\frac{x}{5}) = \log(x) - \log(5)$ Waarom?

$$\frac{x}{5} = \frac{10^{\log(x)}}{10^{\log(5)}} = 10^{\log(x)-\log(5)}$$
$$\frac{x}{5} = 10^{\log(x/5)}$$
$$\to 10^{\log(x/5)} = 10^{\log(x)-\log(5)} \to \log(x/5) = \log(x) - \log(5)$$

Wat is het verschil in grafiek tussen log x en $\log(\frac{x}{5})$?

De grafiek van $y = \log(x/5)$ heeft dezelfde vorm als de grafiek van $y = \log(x)$, alleen is deze log(5) = 0,7 schaaldeel naar beneden verschoven



R12 Waarom is ${}^2\log(3)$ gelijk aan $\frac{\log(3)}{\log(2)}$?

Stel
$$^2\log(3) = a$$
$$\log(3) = b$$
$$\log(2) = c$$
$$2^a = 3 \text{ en } 10^b = 3 \text{ en } 10^c = 2$$
$$(10^c)^a = 10^b \to ac = b \to a = \frac{b}{c} \to {}^2\log(3) = \frac{\log(3)}{\log(2)}$$

of
$$2^{^2\log(3)} = 3 \to \log(2^{^2\log(3)}) = \log(3) \to {}^2\log(3) \cdot \log(2) = \log(3)$$
$$\to {}^2\log(3) = \frac{\log(3)}{\log(2)}$$

5.3

R13 Voor het radioactief verval van een bepaald isotoop geldt:

$$N(n) = N(0)\cdot 0{,}5^n$$
$$n = \frac{t}{T_{1/2}} = \frac{t}{5700} \quad (t \text{ in jaar})$$
$$0{,}5 = 2^{-1} \rightarrow 0{,}5^n = (2^{-1})^n = 2^{-n}$$
$$N(n) = N(0)\cdot 0{,}5^n = N(0)\cdot 2^{-t/5700}$$

Na hoeveel jaar is het aantal kernen gehalveerd?

$$N = 0{,}5\cdot N(0) \rightarrow 0{,}5\cdot N(0) = N(0)\cdot 2^{-t/5700}$$
$$\rightarrow 0{,}5 = 2^{-t/5700} \rightarrow -t/5700 = {}^2\log(0{,}5)$$
$$-t/5700 = \frac{\log(0{,}5)}{\log(2)} = \frac{-\log(2)}{\log(2)} = -1 \rightarrow t = 5700 \ jaar$$

Omdat t = $T_{1/2}$ had je het antwoord ook zonder wiskundige berekening meteen kunnen geven.

Hoeveel % is er nog over als (t/5700) = 4?

$$N = N(0)\cdot 2^{-t/5700} \rightarrow N = 100\% \times 2^{-4} = 6{,}25\%$$

R14 Voor de isotoop ^{60}Co geldt:

$$N = N(0)\cdot 2^{-t/5} \quad T_{1/2} = 5 \text{ jaar}$$

5.4

R15 ln(100) is de exponent die bij het grondtal **e** de waarde 100 geeft.

R16 2 is hetzelfde als $e^{\ln 2}$.
ln(2) is de exponent die bij het grondtal **e** de waarde 2 geeft
ofwel $\boxed{e^{\ln(2)} = 2}$

R17 Als je 2^x schrijft als $e^{0,6931x}$ kun je eenvoudig de helling van de raaklijn in ieder punt bepalen.
$2^x = e^{\ln(2)} \rightarrow afgerond: 2^x = e^{0.6931x}$
De rc van de raaklijn aan e^x is gelijk aan e^x.
De rc van de raaklijn aan e^{2x} is gelijk aan $2e^{2x}$.
De rc van de raaklijn aan $e^{0,6931x}$ is gelijk aan $0{,}6931e^{0,6931x}$.
Dus de rc van de raaklijn voor $x = 1$:
$rc(x=1) = 0{,}6931 \times e^{0,6931\times 1} = 0{,}6931 \times 2 = 1{,}386$

R18 Waarom snijden de grafieken van 2^x en e^x elkaar voor $x = 0$
$2^0 = e^0 = a^0 = 1$

5.5

R19 Waarom geldt: $\log(x) = \log(e) \cdot \ln(x) = 0{,}4343 \cdot \ln(x)$?

$$\ln(x) = {}^{e}\log(x) = \frac{\log(x)}{\log(e)} \rightarrow \log(x) = \log(e)\cdot\ln(x) = 0{,}4343\cdot\ln(x)$$

R20 Dus $\log(2) = \log(e)\cdot\ln(2) = 0{,}4343\cdot\ln(2)$

R21 Als $a^x > a^p$ dan is soms $x > p$ en soms $x < p$.

$$\boxed{\begin{array}{l} a^x > a^p \quad en \quad a > 0 \quad dan \quad x > p \\ voorbeeld: 2^3 > 2^2 \rightarrow 3 > 2 \\ \\ a^x > a^p \quad en \quad a < 0 \quad dan \quad x < p \\ voorbeeld: (0{,}5)^2 > (0{,}5)^3 \rightarrow 2 < 3 \end{array}}$$

$2^x, e^x, 4^x$ kun je allemaal schrijven als een macht met het hetzelfde grondtal 2.

$$\boxed{\begin{array}{l} e^x = \left(2^{{}^{2}\log(e)}\right)^x = 2^{x\cdot{}^{2}\log(e)} \rightarrow afgerond: e^x = 2^{1{,}443x} \\ 4^x = (2^2)^x = 2^{2x} \end{array}}$$

R22

$${}^{4}\log(x^2) = \frac{\log(x^2)}{\log(2^2)} = \frac{2\log(x)}{2\log(2)} = \frac{\log(x)}{\log(2)} = {}^{2}\log(x)$$

$${}^{2}\log(\sqrt{x}) = \frac{\log(\sqrt{x})}{\log(2)} = \frac{\log(x^{1/2})}{\log(4^{1/2})} = \frac{\frac{1}{2}\log(x)}{\frac{1}{2}\log(4)} = \frac{\log(x)}{\log(4)} = {}^{4}\log(x)$$

Als je het grondtal aanpast kun je bij een logaritmische vergelijking links en rechts hetzelfde grondtal krijgen.