

2. Kwadratische functies.

R27 De term ax^2 is bepalend voor zeer grote waarden van x .
 Als $a < 0$ dan wordt de term ax^2 zeer groot en negatief zowel bij $x \rightarrow -\infty$ en $x \rightarrow +\infty$. Er is sprake van een bergparabool met maximum.
 Als $a > 0$ dan wordt de term ax^2 zeer groot en positief zowel bij $x \rightarrow -\infty$ en $x \rightarrow +\infty$. Er is sprake van een dalparabool met minimum.
 Als $a = 0$ dan is er sprake van een eerstegraads functie in is de grafiek een rechte lijn.

R28 De coëfficiënt c is gelijk aan het snijpunt met de y -as.

$$f(0) = c$$

$$\text{Als } f(0) = 0 \text{ dan } f(x) = ax^2 + bx = x(ax + b)$$

$$x_1 = 0 \text{ en } x_2 = -\frac{b}{a}$$

R29 Als a en b beide positief of negatief zijn ligt de top of het dal links van de y -as.

Als a en b een tegengesteld teken hebben ligt de top of het dal rechts van de y -as.

R30 Als de top van de parabool onder de x -as ligt en $a < 0$ zijn er geen snijpunten met de x -as, omdat er dan sprake is van een bergparabool met een maximum onder x -as.

R31 Bij een dalparabool zijn er geen snijpunten als het minimum boven de x -as ligt en als $a > 0$.

R32 Als je het functievoorschrift $f(x) = ax^2 + bx + c$ schrijft in de vorm $f(x) = a(x + p)(x + q)$ dan kun je meteen de snijpunten met de x -as en de plaats van het dal of top bepalen.

Voorbeeld:

$$f(x) = 2(x - 2)(x + 3) \quad f(x) = 0 \text{ als } x_1 = 2 \text{ of als } x_2 = -3$$

$$f(x) = 2(x - 2)(x + 3) = 2(x^2 - 2x + 3x - 6) = 2(x^2 + x - 6)$$

Je moet 2 getallen zoeken die opgeteld $+1$ en vermenigvuldigd -6 opleveren. Dat zijn $+3$ en -2

Dit gaat alleen met mooie getallen.

Dit lukt je niet bij bijv. $x^2 + 1,1x - 6$

coördinaten van de top:

$$x_{dal} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2 - 3}{2} = -0,5$$

$$y_{dal} = 2((-0,5)^2 - 0,5 - 6) = -12,5$$

R33

Als de snijpunten met de x -as en de coördinaten van de top gegeven zijn kun je het functievoorschrift opstellen.

Voorbeeld:

$$\begin{aligned}x_1 &= -2 \text{ en } x_2 = 4 \text{ en top : } (1; 4) \\ \rightarrow f(x) &= a(x+2)(x-4) \\ \rightarrow 4 &= a(1+2)(1-4) \rightarrow 4 = -9a \rightarrow a = -\frac{4}{9} \\ \rightarrow f(x) &= -\frac{4}{9}(x+2)(x-4)\end{aligned}$$

R34

Als de snijpunten met de x -as en de coördinaten van een punt op de grafiek gegeven zijn kun je het functievoorschrift opstellen.

Voorbeeld:

$$\begin{aligned}x_1 &= -2 \text{ en } x_2 = 4 \text{ en punt : } (1; 3) \\ \rightarrow f(x) &= a(x+2)(x-4) \\ \rightarrow 3 &= a(1+2)(1-4) \rightarrow 3 = -9a \rightarrow a = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3} \\ \rightarrow f(x) &= -\frac{1}{3}(x+2)(x-4)\end{aligned}$$

R35

Het voordeel om het functievoorschrift $f(x) = ax^2 + bx + c$ te schrijven in de vorm $f(x) = a(x+p)^2 + q$ is dat je meteen de coördinaten van de top of het dal kunt zien.

Voorbeeld:

$$\begin{aligned}\rightarrow f(x) &= -2(x+2)^2 + 4 \quad \text{bergparabool dus top} \\ p &= -2 \text{ en } q = 4 \\ \rightarrow \text{top : } &(-2; 4) \\ \text{Als } x &= -2 \text{ dan } y = 4 \\ \text{Als } x &\neq -2 \text{ dan } y < 4\end{aligned}$$

R36 De grafiek van $f(x) = ax^2 + bx + c$ is eerst 1 schaaldeel naar rechts verschoven en vervolgens 4 schaaldelen naar beneden verschoven en dan krijg je: $g(x) = a(x-1)^2 + b(x-1) + c - 4$

R37 Laat zien dat $x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$.

$$(x+a)(x-a) = x^2 - ax + ax - a^2 = x^2 - a^2$$

Laat zien dat $x^8 - a^8 = (x^4 + a^4)(x^2 + a^2)(x+a)(x-a)$.

$$\begin{aligned}(x^8 - a^8) &= (x^4 + a^4)(x^4 - a^4) = (x^4 + a^4)(x^2 + a^2)(x^2 - a^2) \\ &= (x^4 + a^4)(x^2 + a^2)(x+a)(x-a)\end{aligned}$$

Kwadraten zoals x^4 , a^4 , x^2 en a^2 zijn altijd positief.

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Laat zien dat $x^2 + 4kx + k^2 = (x + 2k)^2 - 3k^2$. ($k = \text{constante}$)

$$\begin{aligned} a(x+p)^2 + q &= ax^2 + 2apx + ap^2 + q \\ ax^2 + 2apx + ap^2 + q &\Leftrightarrow x^2 + 4kx + k^2 \\ \rightarrow a &= 1 \\ \rightarrow 2ap &= 4k \rightarrow p = \frac{2k}{a} = 2k \\ \rightarrow ap^2 + q &= k^2 \rightarrow q = k^2 - ap^2 = k^2 - 4k^2 = -3k^2 \\ x^2 + 4kx + k^2 &= (x + 2k)^2 - 3k^2 \end{aligned}$$

R38 Voor de snijpunten met x -as geldt: $a(x+p)^2 + q = 0$

$$\text{Dus } (x+p) = \pm \sqrt{\frac{-q}{a}} \rightarrow x_{1,2} = -p \pm \sqrt{\frac{-q}{a}}$$

coördinaten van de top of het dal: $(-p; q)$

Voorbeeld:

$$f(x) = -2(x+3)^2 - 6 \rightarrow \text{top} : (-3; -6)$$

Als $(-q/a) < 0$ dan geen snijpunten?

Voorbeeld:

$$f(x) = -2(x+3)^2 - 6 \rightarrow \text{top} : (-3; -6)$$

$$-\frac{q}{a} = -\frac{-6}{-2} = -3$$

top ligt onder x -as

Als $(-q/a = 0$ ofwel als $q = 0)$ is er één raakpunt met de x -as.

Voorbeeld:

$$f(x) = -2(x+3)^2 \rightarrow \text{top} : (-3; 0)$$

R39 $f(x) = ax^2 + bx + c$ a, b , en c geven informatie over de vorm van de parabool

$$f(x) = a(x+p)(x+q) \quad \text{snijpunten } x_1 = -p \text{ en } x_2 = -q$$

$$f(x) = a(x+p)^2 + q \quad \text{top of dal } (-p; q)$$

R40 De abc-formule is de algemene tool om de oplossingen van een vierkantsvergelijking te vinden.

Voorbeeld.

$$f(x) = 2,2x^2 - 4,1x - 3$$

$$D = b^2 - 4ac = (-4,1)^2 - 4 \times 2,2 \times -3 = 43,21$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{4,1 \pm \sqrt{43,21}}{4,4}$$

$$x_1 = \frac{4,1 - \sqrt{43,21}}{4,4} \quad \text{en} \quad x_2 = \frac{4,1 + \sqrt{43,21}}{4,4}$$

afgerond :

$$x_1 = -0,562 \quad \text{en} \quad x_2 = 2,43$$

R41 De term $(b^2 - 4ac)$ noemt men de discriminant D .

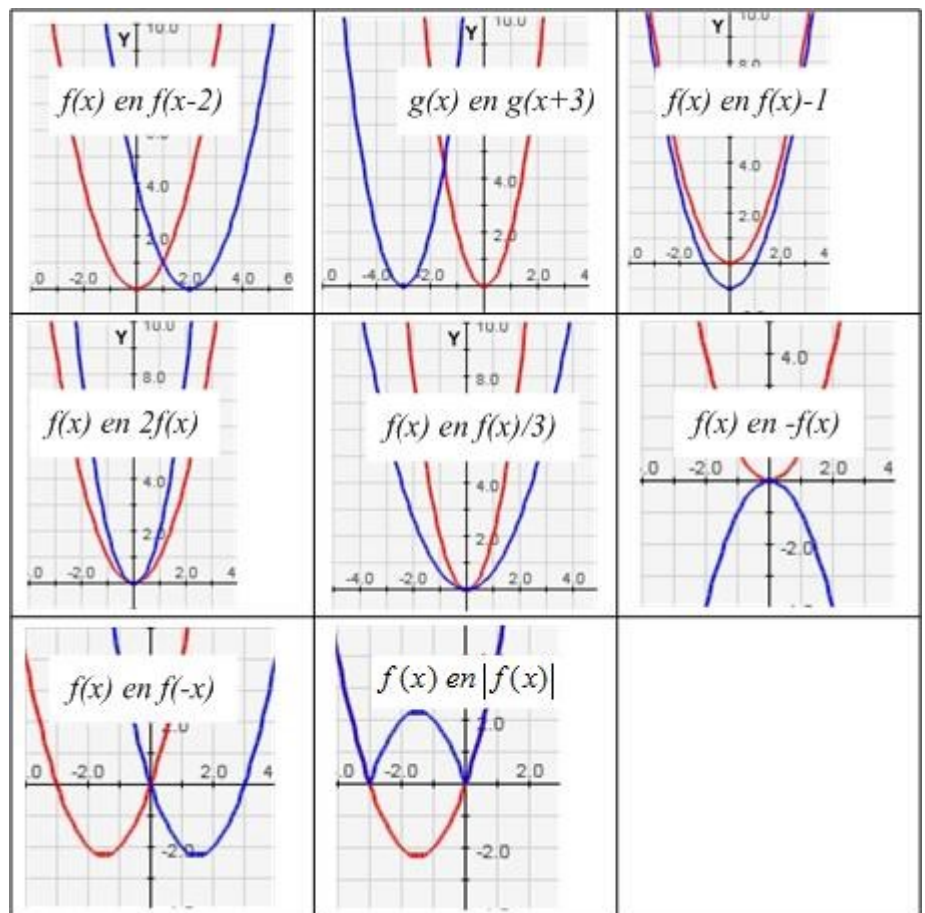
Als $D < 0$ dan geen snijpunten met x -as

Als $D = 0$ dan één raakpunt met x -as

Als $D > 0$ dan 2 snijpunten met x -as

R42 Voor de extreme waarde van een parabool (top of dal) gelden de coördinaten $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$.

R43



R43a Als $f(x) > g(x)$ dan $f(x) - g(x) > 0$

R19

Voorbeeld:

bereken snijpunten

$$f(x) - g(x) = 0$$

$$\rightarrow 2x^2 - 3x + 2 - (x^2 + 2x - 2) = 0$$

$$\rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

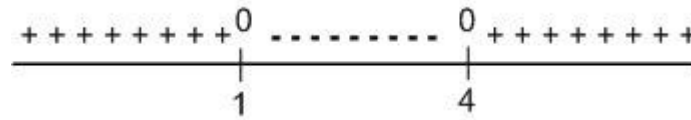
$$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$\rightarrow x_1 = 1 \text{ en } x_2 = 4$$

Dit zijn de snijpunten met de x-as van een dalparabool

Dus $f(x) - g(x) > 0$ als $x < 1$ of $x > 4$



R43b 3 vergelijkingen met 3 onbekenden

R20 Je moet 100 kg mengsel van de stoffen A, B en C maken.

Dit mengsel moet 5% A, 20% B en 75% C bevatten.

Je hebt een mengsel ABC met 2% A en 10% B, een mengsel

ABC met 30% B en 60% C en een mengsel ABC met

5% A en 60% C

Stel x kg met 2% A, y kg met 20% B en z kg 5%A

1

$$x + y + z = 100$$

2

$$0,02x + 0,1y + 0,05z = 0,05 \times 100 \quad \text{stof A}$$

3

$$0,1x + 0,3y + 0,35z = 0,2 \times 100 \quad \text{stof B}$$

1

$$x + y + z = 100$$

2

$$0,02x + 0,1y + 0,05z = 5 \quad \times 50$$

$$x + y + z = 100$$

$$x + 5y + 2,5z = 250 \quad -$$

4

$$-4y - 1,5z = -150$$

1

$$x + y + z = 100$$

3

$$0,1x + 0,3y + 0,35z = 0,2 \times 100 \quad \times 10$$

$$x + y + z = 100$$

$$x + 3y + 3,5z = 200 \quad -$$

5

$$-2y - 2,5z = -100$$

4

$$-4y - 1,5z = -150$$

5

$$-2y - 2,5z = -100 \quad \times 2$$

$$-4y - 1,5z = -150$$

$$-4y - 5z = -200 \quad -$$

$$0 + 3,5z = 50 \rightarrow z = \frac{50}{3,5} = 14,3 \text{ kg}$$

4

$$-4y - 1,5 \times 14,3 = -150 \rightarrow -4y = -128,6 \rightarrow y = 32,2 \text{ kg}$$

1

$$x + 14,3 + 32,2 = 100 \rightarrow x = 53,5 \text{ kg}$$