

5. Exponentiële en logaritmische functies.

R59 Wat is het verschil tussen een machtsfunctie en een exponentiële functie?

Bij een machtsfunctie is het grondtal de variabele.

Voorbeeld: $f(x) = 2x^3$

Bij een exponentiële functie is de exponent de variabele.

Voorbeeld: $f(x) = 3^x$

R60 Wat is het verschil tussen de grafiek van 2^x en -2^x ?

2^x heeft de tegenovergestelde waarde van -2^x .

Als $2^x = 3$ dan $-2^x = -3$

De functie $(-2)^x$ niet gedefinieerd voor alle waarden van x .
 $(-2)^{10}$ bestaat wel en $(-2)^{10,1}$ niet.

R61 Waarom is 2^{x+1} hetzelfde als $2 \cdot 2^x$?

$$2^{x+1} = 2^1 \cdot 2^x = 2 \cdot 2^x$$

De grafiek van 2^{x+1} is 1 schaaldeel naar links verschoven t.o.v. de grafiek van 2^x .

Als je de grafiek van 2^x een schaaldeel naar rechts verschuift krijg je de grafiek van $2^{(x-1)}$.

$$2^{(x-1)} = \frac{2^x}{2^1} = 2^x / 2$$

Waarom is 4^x hetzelfde als $(2^x)^2$?

$$4^x = (2^2)^x = (2^x)^2$$

Als $2^x = 10$ dan $2^{-x} = 0,1$ Waarom?

$$\frac{1}{2^x} = \frac{1}{10} \rightarrow 2^{-x} = 0,1$$

R62

Zijn 2^x en 2^{-x} reciproke functies?

$$\frac{1}{2^x} = 2^{-x} \quad \text{Dus } 2^x \text{ en } 2^{-x} \text{ zijn reciproke functies}$$

$$\text{Als } 2^x = 3 \text{ dan } 2^{-x} = \frac{1}{3}$$

R63 De grafiek van $2 \cdot 2^x + 2$ krijg je als de grafiek van 2^x een factor 2 uitgerekt wordt en vervolgens 2 schaaldelen naar boven verschoven wordt.

R64 Waarom gaan alle grafieken van $f(x) = a^{bx}$ door het punt $(0, 1)$?

$$a^{bx} = a^0 = 1 \quad \text{ongeacht de waarde van } a \text{ en } b$$

R65 $\log(x)$ of ${}^{10}\log(x)$ is de exponent bij het grondtal 10 zodat je de waarde x krijgt. Dus $10^{\log(x)} = x$

R66 $3\log(x) = 3 \times {}^{10}\log(x)$ en ${}^3\log(x)$ is de exponent bij het grondtal 3 om de waarde x te krijgen.

Waarom is $\log(x^3) = 3 \cdot \log(x)$?

De exponent van x^3 is $3 \times$ zo groot als de exponent van x^1

R67 De grafiek van $-\log(x^3)$ is gespiegeld t.o.v. de grafiek van $\log(x^3)$.

Dit is een spiegeling t.o.v. de x -as

$-\log(x^3)$ is hetzelfde als $\log(x^{-3})$ Waarom?

$$-\log(x^3) = \log(x^3)^{-1} = \log(x^{-3})$$

R68 $\log(2x) = \log(x) + \log(2)$

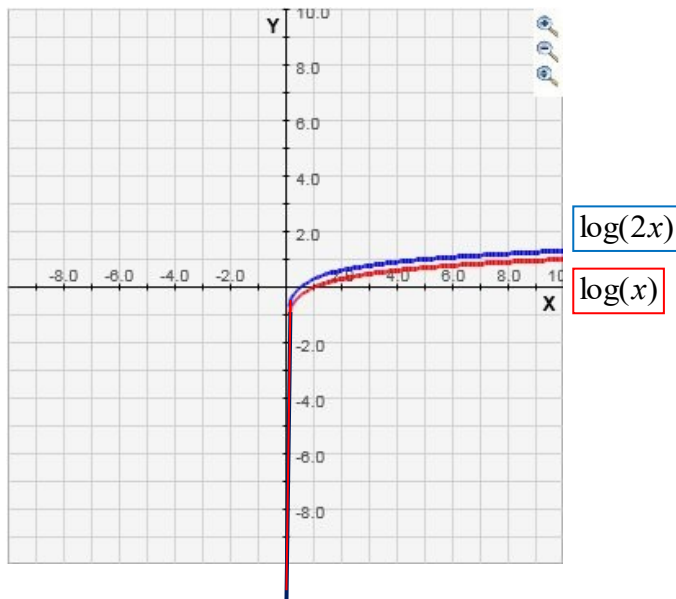
$$2x = 2 \times x$$

$$10^{\log(2x)} = 10^{\log(2)} \times 10^{\log(x)} = 10^{\log(2)+\log(x)}$$

$$\log(2x) = \log(x) + \log(2)$$

Wat is het verschil in grafiek tussen $\log(x)$ en $\log(2x)$?

De grafiek van $y = \log(2x)$ heeft dezelfde vorm als de grafiek van $y = \log(x)$, alleen is deze $\log(2) = 0,3$ schaaldeel naar boven verschoven.

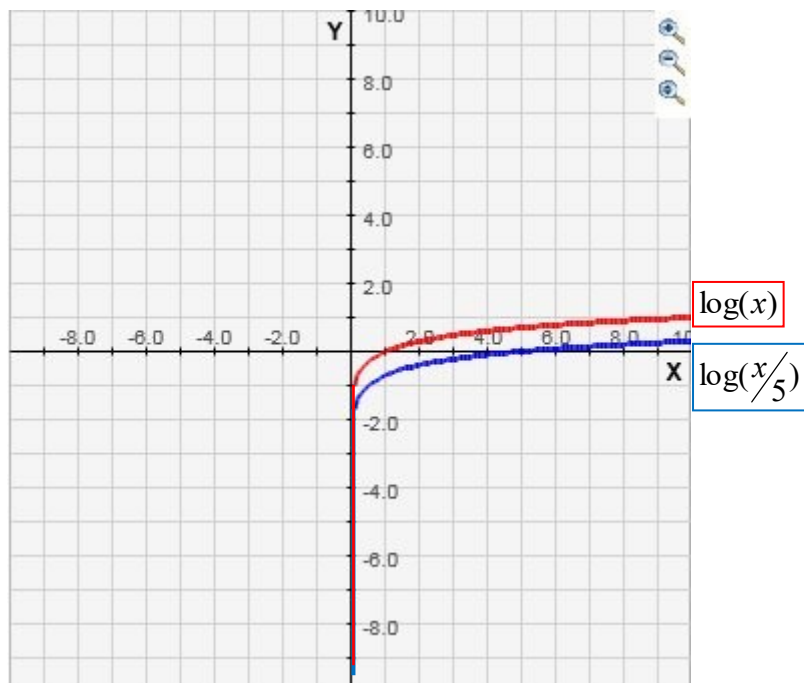


R69 $\log\left(\frac{x}{5}\right) = \log(x) - \log(5)$ Waarom?

$$\frac{x}{5} = \frac{10^{\log(x)}}{10^{\log(5)}} = 10^{\log(x) - \log(5)}$$
$$\frac{x}{5} = 10^{\log\left(\frac{x}{5}\right)}$$
$$\rightarrow 10^{\log\left(\frac{x}{5}\right)} = 10^{\log(x) - \log(5)} \rightarrow \log\left(\frac{x}{5}\right) = \log(x) - \log(5)$$

Wat is het verschil in grafiek tussen $\log x$ en $\log\left(\frac{x}{5}\right)$?

De grafiek van $y = \log\left(\frac{x}{5}\right)$ heeft dezelfde vorm als de grafiek van $y = \log(x)$, alleen is deze $\log(5) = 0,7$ schaaldeel naar beneden verschoven



R70 Waarom is ${}^2\log(3)$ gelijk aan $\frac{\log(3)}{\log(2)}$?

$$2^{{}^2\log(3)} = 3 \rightarrow \log(2^{{}^2\log(3)}) = \log(3) \rightarrow {}^2\log(3) \cdot \log(2) = \log(3)$$
$$\rightarrow {}^2\log(3) = \frac{\log(3)}{\log(2)}$$

R71 Voor het radioactief verval van een bepaald isotoop geldt:

$$N(n) = N(0) \cdot 0,5^n$$

$$n = \frac{t}{T_{1/2}} = \frac{t}{5700} \quad (t \text{ in jaar})$$

$$0,5 = 2^{-1} \rightarrow 0,5^n = (2^{-1})^n = 2^{-n}$$

$$N(n) = N(0) \cdot 0,5^n = N(0) \cdot 2^{-t/5700}$$

Na hoeveel jaar is het aantal kernen gehalveerd?

$$N = 0,5 \cdot N(0) \rightarrow 0,5 \cdot N(0) = N(0) \cdot 2^{-t/5700}$$

$$\rightarrow 0,5 = 2^{-t/5700} \rightarrow -\frac{t}{5700} = {}^2\log(0,5)$$

$$-\frac{t}{5700} = \frac{\log(0,5)}{\log(2)} = \frac{-\log(2)}{\log(2)} = -1 \rightarrow t = 5700 \text{ jaar}$$

Omdat $t = T_{1/2}$ had je het antwoord ook zonder wiskundige berekening meteen kunnen geven.

Hoeveel % is er nog over als $(t/5700) = 4$?

$$N = N(0) \cdot 2^{-t/5700} \rightarrow N = 100\% \times 2^{-4} = 6,25\%$$

R72 Voor de isotoop ^{60}Co geldt:

$$N = N(0) \cdot 2^{-t/5} \quad T_{1/2} = 5 \text{ jaar}$$

R73 $\ln(100)$ is de exponent die bij het grondtal **e** de waarde 100 geeft.

R74 2 is hetzelfde als $e^{\ln 2}$.

$\ln(2)$ is de exponent die bij het grondtal **e** de waarde 2 geeft ofwel $e^{\ln(2)} = 2$

R75 Als je 2^x schrijft als $e^{0,6931x}$ kun je eenvoudig de helling van de raaklijn in ieder punt bepalen.

$$2^x = e^{\ln(2)x} \rightarrow \text{afgerond} : 2^x = e^{0,6931x}$$

De rc is gelijk aan $\ln(2) \times y$ -waarde

$$rc \text{ aan grafiek van } 2^x \text{ voor } (x=1) = \ln(2) \times 2^1 = 1,386$$

R76 Waarom snijden de grafieken van 2^x en e^x elkaar voor $x = 0$

$$2^0 = e^0 = a^0 = 1$$

R77 Waarom geldt: $\log(x) = \log(e) \cdot \ln(x) = 0,4343 \cdot \ln(x)$?

$$\ln(x) = {}^e\log(x) = \frac{\log(x)}{\log(e)} \rightarrow \log(x) = \log(e) \cdot \ln(x) = 0,4343 \cdot \ln(x)$$

R78 $\log(2) = \log(e) \cdot \ln(2) \rightarrow \log(e) = \frac{\log(2)}{\ln(2)} = 0,4343$
 $\rightarrow e = 10^{0,4343} = 2,718$ afgerond

R79 Als $a^x > a^p$ dan is soms $x > p$ en soms $x < p$.

$$a^x > a^p \text{ en } a > 0 \text{ dan } x > p$$

voorbeeld : $2^3 > 2^2 \rightarrow 3 > 2$

$$a^x > a^p \text{ en } a < 0 \text{ dan } x < p$$

voorbeeld : $(0,5)^2 > (0,5)^3 \rightarrow 2 < 3$

$2^x, e^x, 4^x$ kun je allemaal schrijven als een macht met het hetzelfde grondtal 2.

$$e^x = (2^{2 \log(e)})^x = 2^{x \cdot 2 \log(e)} \rightarrow \text{afgerond} : e^x = 2^{1,443x}$$

$$4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$$

R80 ${}^4 \log(x^2) = \frac{\log(x^2)}{\log(2^2)} = \frac{2 \log(x)}{2 \log(2)} = \frac{\log(x)}{\log(2)} = {}^2 \log(x)$

$${}^2 \log(\sqrt{x}) = \frac{\log(\sqrt{x})}{\log(2)} = \frac{\log(x^{1/2})}{\log(2^{1/2})} = \frac{1/2 \log(x)}{1/2 \log(2)} = \frac{\log(x)}{\log(2)} = {}^4 \log(x)$$

Als je het grondtal aanpast kun je bij een logaritmische vergelijking links en rechts hetzelfde grondtal krijgen.