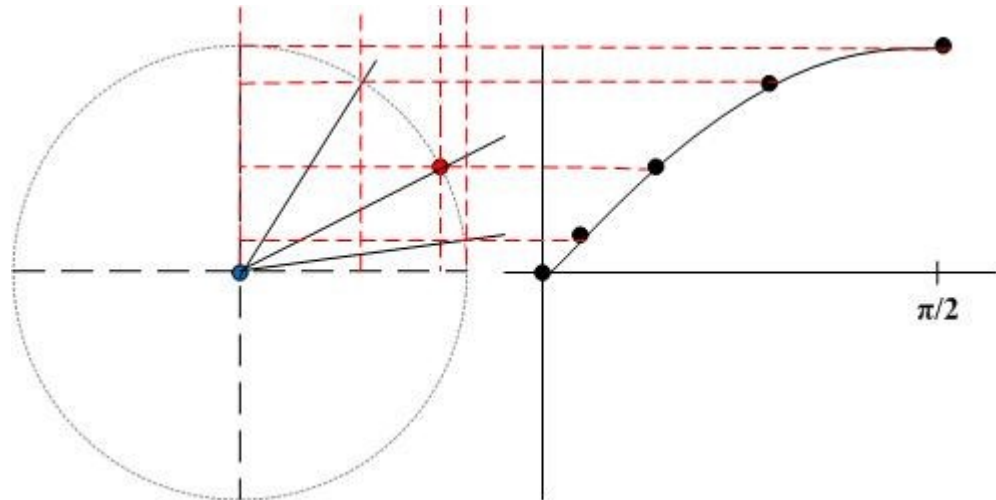


## 6. Goniometrische functies.

**R81** Wat heeft een cirkelomwenteling te maken met een sinus of cosinus?

Als een punt met constante snelheid een cirkelbeweging uitvoert en je zet hoogte van het punt uit tegen de hoek waarover gedraaid is dan krijg je een sinusvormige grafiek. Dat is ook het geval als je de horizontale afstand van het punt uitzet tegen de hoek. Dan krijg je een cosinus.



**R82** Omzetten van graden naar radialen.

$$360^{\circ} = 2\pi \text{ rad} \rightarrow 1^{\circ} = \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

$$x^{\circ} = x \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

$$\text{afgerond : } x^{\circ} = 0,01745 x \text{ rad}$$

$$\text{voorbeeld : } 45^{\circ} = 0,785 \text{ rad}$$

$$90^{\circ} = 1,57 \text{ rad}$$

**R83** Omzetten van radialen naar graden.

$$2\pi \text{ rad} = 360^{\circ} \rightarrow 1 \text{ rad} = \frac{360^{\circ}}{2\pi}$$

$$x \text{ rad} = x \cdot \frac{360^{\circ}}{2\pi} \quad \text{afgerond : } x \text{ rad} = 57,3x^{\circ}$$

$$\text{voorbeeld : } 3,14 \text{ rad} = 180^{\circ}$$

$$1 \text{ rad} = 57,3^{\circ}$$

R84

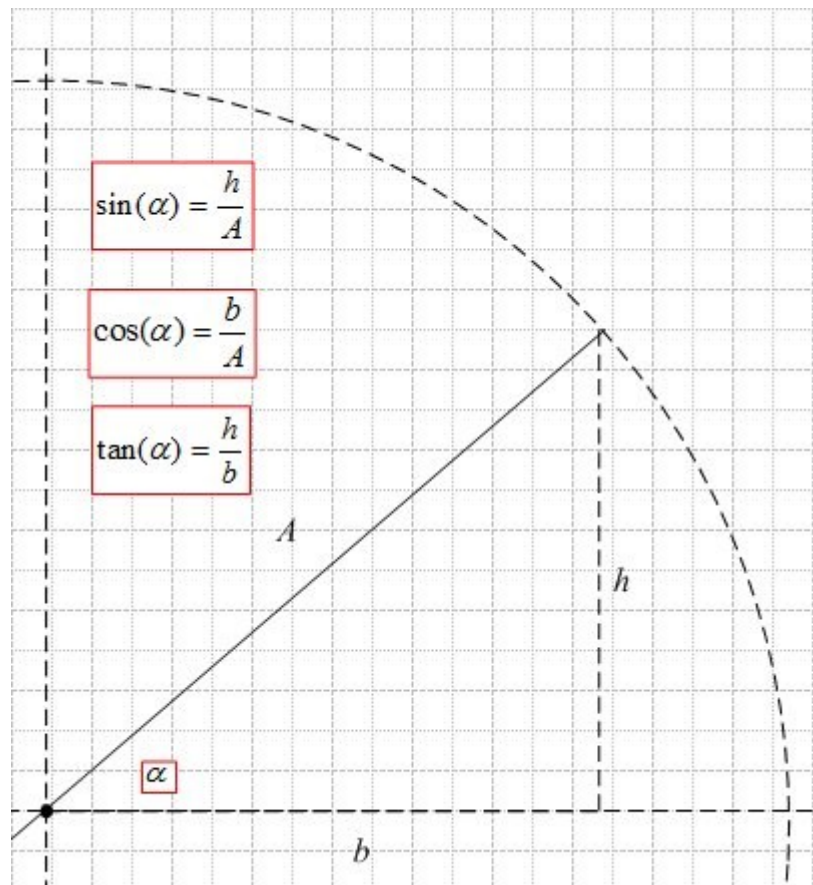
$$\sin(\alpha) = \frac{h}{A} \quad \text{en} \quad -1 \leq \frac{h}{A} \leq 1$$
$$\cos(\alpha) = \frac{b}{A} \quad \text{en} \quad -1 \leq \frac{b}{A} \leq 1$$
$$\tan(\alpha) = \frac{h}{b} \quad \frac{h}{b} \rightarrow \infty \quad \text{als } \alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$\sin(\alpha)$  is maximaal 1 bij  $\alpha = \frac{\pi}{2} \text{ rad} = 90^\circ$

$\sin(\alpha)$  is minimaal -1 bij  $\alpha = \frac{3\pi}{2} \text{ rad} = 270^\circ$

$\cos(\alpha)$  is maximaal 1 bij  $\alpha = 0 \text{ rad} = 0^\circ$

$\cos(\alpha)$  is minimaal -1 bij  $\alpha = \pi \text{ rad} = 180^\circ$



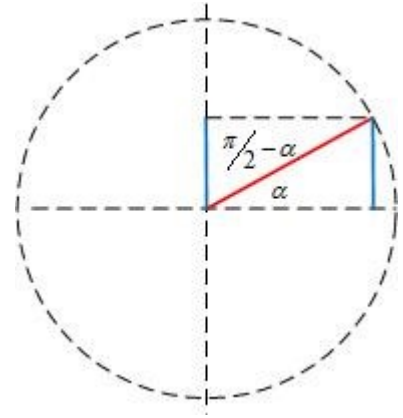
R85

Bij een middelpuntshoek van 1 rad en een straal van 2m heeft de bijbehorende cirkelboog een lengte van 2m.

Bij een middelpuntshoek van  $2\pi$  rad en een straal van 2m heeft de bijbehorende cirkelboog een lengte van  $2\pi \times r = 4\pi = 12,56$  m

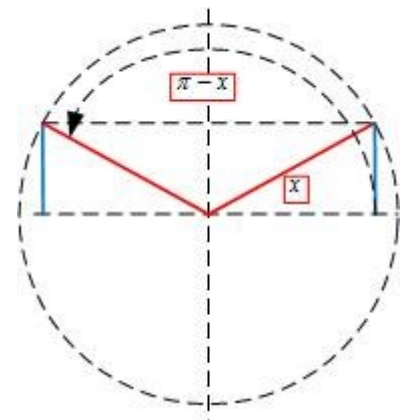
Deze lengte noemt men de **omtrek**.

**R86**  $\sin(\alpha) = \cos(\pi/2 - \alpha)$  zie figuur



$\sin(\alpha) = \sin(\alpha + 2\pi)$  omdat na 1 omwenteling de hoek weer hetzelfde is.

Als  $\sin(x) = a$ , dan ook  $\sin(x + k \cdot 2\pi) = a$  en ook  $\sin(\pi - x + k \cdot 2\pi) = a$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) zie figuur



**R87** Waarom geldt:  $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ ? ( $\sin^2(\alpha) = (\sin(\alpha))^2$ )?

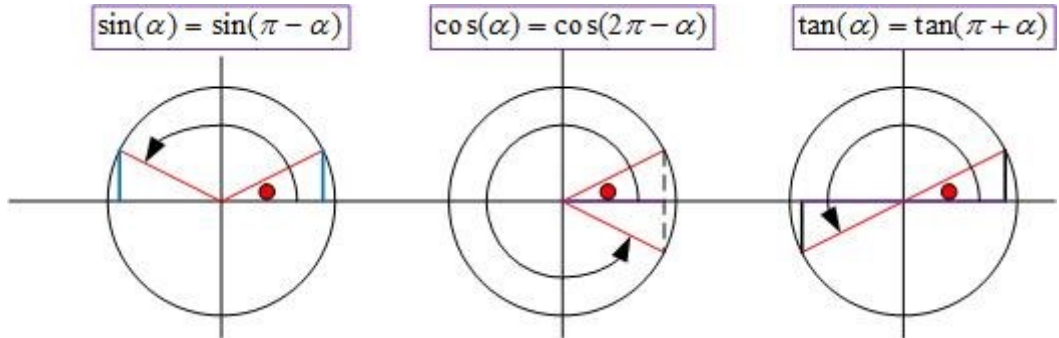
$$\begin{aligned} \sin^2(\alpha) &= \frac{h^2}{A^2} \rightarrow h^2 = A^2 \cdot \sin^2(\alpha) \\ \cos^2(\alpha) &= \frac{b^2}{A^2} \rightarrow b^2 = A^2 \cdot \cos^2(\alpha) \\ h^2 + b^2 &= A^2 \rightarrow A^2 \cdot \sin^2(\alpha) + A^2 \cdot \cos^2(\alpha) = A^2 \\ \rightarrow \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) &= 1 \end{aligned}$$

**R88** Als je de sinus, cosinus of tangens kent kun je via de inverse functie de hoek berekenen.

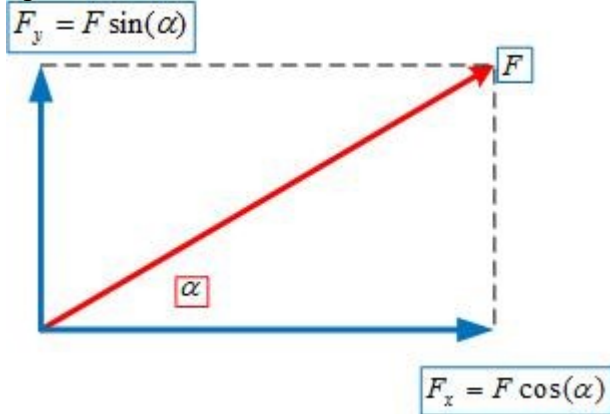
Voorbeeld:

$$\begin{aligned} \sin(x) = 0,3 &\rightarrow x = \arcsin(0,3) \text{ of } x = \pi - \arcsin(0,3) \\ &\rightarrow x = 0,305 \text{ rad of } x = 3,14 - 0,305 = 2,84 \text{ rad} \\ \cos(x) = 0,7 &\rightarrow x = \arccos(0,7) \text{ of } x = 2\pi - \arccos(0,7) \\ &\rightarrow x = 0,795 \text{ rad of } x = 6,28 - 0,795 = 5,485 \text{ rad} \\ \tan(x) = 0,45 &\rightarrow x = \arctan(0,45) \text{ of } x = \pi + \arctan(0,45) \\ &\rightarrow x = 0,423 \text{ rad of } x = 3,14 + 0,423 = 3,563 \text{ rad} \end{aligned}$$

**R89**  $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$   
 $\cos(2\pi - \alpha) = \cos(\alpha)$   
 $\tan(\pi + \alpha) = \tan(\alpha)$

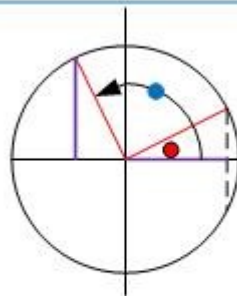


**R90** Hoe kun je een vector ontbinden in een  $x$ - en  $y$ -component?  
 Hoe kun je een vector ontbinden in 2 componenten die loodrecht op elkaar staan?



**R91** Waarom is  $\cos(2x) = \sin(2x + \pi/2)$

$$\cos(2x) = \sin(2x + \pi/2)$$

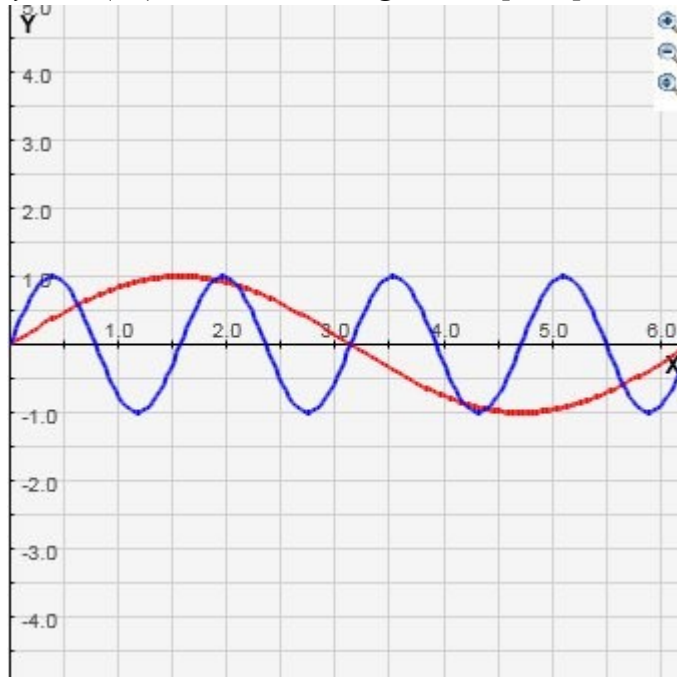


- =  $2x$
- =  $2x + \pi/2$

**R92** Wat is het voordeel om het functievoorschrift  $\sin(2x + \pi/2)$  te schrijven als  $\sin 2(x + \pi/4)$ ?

Op deze manier zie je dat de grafiek van  $\sin(2x)$   $\pi/2$  rad naar links verschoven is.

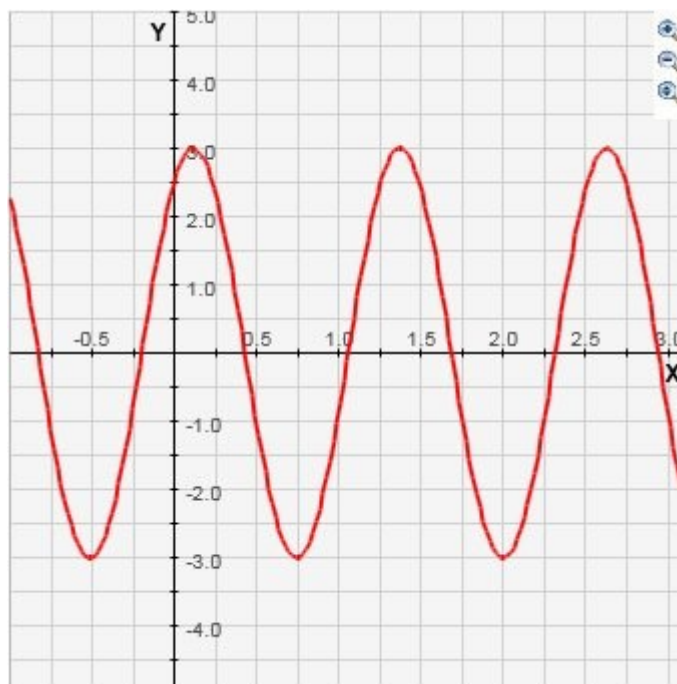
- R93** Geef het functievoorschrift van een sinus met een  $4x$  zo korte periode in rad dan  $y = \sin(x)$   
 $y = \sin(x)$  1 omwenteling of periode voor  $[0, 2\pi]$   
 $y = \sin(4x)$  4 omwentelingen voor  $[0, 2\pi]$



- R94** Voor een harmonische beweging geldt :  $y = 3\sin(5x + 1)$   
 5 periodes voor domein  $[0, 2\pi]$   
 dus 1 periode voor domein  $[0, \frac{2\pi}{5}]$

De frequentie is 5 ,ofwel 5 omwentelingen als  $x$  verandert van 0 tot  $2\pi$ .

- R95**  $y = 3\sin(5x + 1)$  voor het domein  $[0, \pi]$ .



Hoeveel is de grafiek van deze functie verschoven t.o.v.

$$3\sin(5x)?$$

$$3\sin(5x + 1) = 3\sin 5(x + 0,2)$$

De grafiek is 0,2 rad naar links verschoven. (klopt met figuur)

**R96** Bij  $2\sin(3x)$  heb je 1 periode voor

$$0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3} \text{ of domein } [0, 2\pi]$$

Bij  $\sin(x)$  heb je 1 periode voor het domein  $[0, 2\pi]$ .

Bij  $\sin(0,5x)$  heb je 0,5 periode voor het domein  $[0, 2\pi]$ .

**R97** De grafiek van  $\sin 2(x - 1)$  is 1 rad naar rechts verschoven t.o.v. de grafiek van  $\sin(2x)$ .

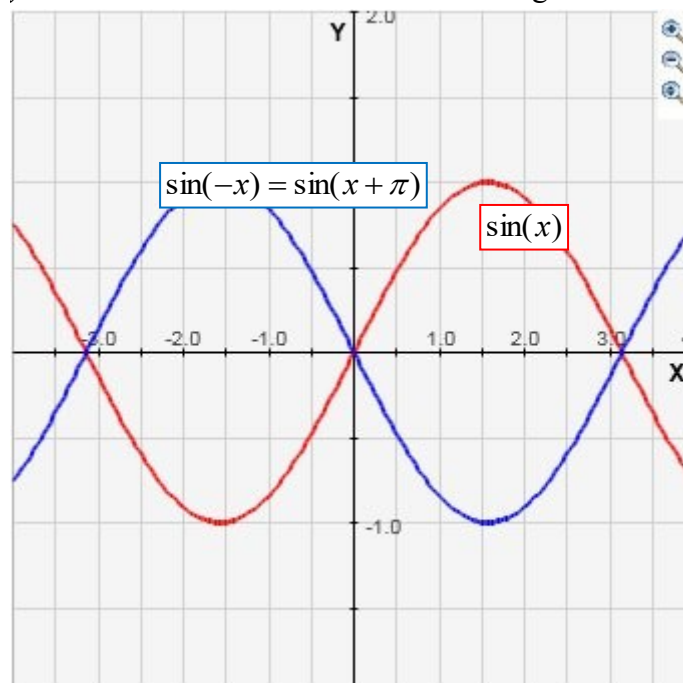
bij  $x = 1$  heeft  $\sin 2(x - 1)$  dezelfde  $y$ -waarde als bij  $\sin(2x)$  bij  $x = 0$ . De grafiek is dus 1 rad naar rechts verschoven.

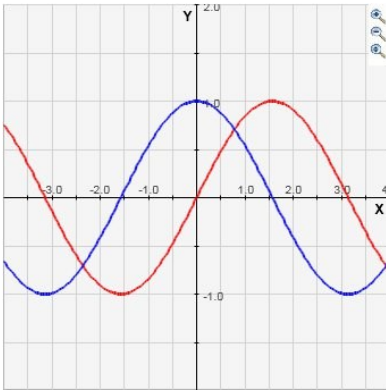
$$2\sin(2x - 1) + 1 = 2\sin 2(x - 0,5) + 1$$

De periode is gehalveerd, de grafiek is 0,5 rad naar rechts verschoven en 1 schaaldeel naar boven t.o.v. de grafiek van  $\sin(x)$ ?

**R98** De grafiek van  $\sin(-x)$  is 3,14 radialen verschoven t.o.v. de grafiek van  $\sin(x)$ .

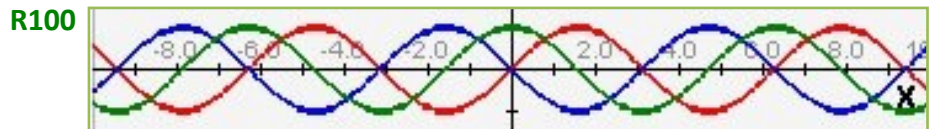
De grafiek van  $\sin(-x)$  is de grafiek van  $\sin(x)$  gespiegeld t.o.v. de  $y$ -as. Dat is hetzelfde als een verschuiving van  $\pi$  rad.





**R99**  $\cos(x) = \sin(x + \pi / 2)$

De grafiek van  $\sin(x + \pi/2)$  is  $\pi/2$  naar links verschoven t.o.v. van de grafiek van  $\sin(x)$ .



rood =  $\sin(x)$   
 blauw =  $\sin(-x)$  tegenovergestelde waarde  
 groen =  $\sin(-x + \pi/2)$  blauw naar links

**R101** Wat is het verschil in de grafiek van  $\sin(x+2)$  en  $\sin(x) + 2$ ?  
 De grafiek  $\sin(x + 2)$  is 2 rad naar links verschoven t.o.v. de grafiek van  $\sin(x)$ .  
 De grafiek van  $\sin(x) + 2$  is 2 schaaldelen naar boven verschoven t.o.v. de grafiek van  $\sin(x)$ .

**R102** Bij een harmonische trilling kun je altijd een cirkelbeweging denken. De projectie van het ronddraaiend punt op de horizontale en verticale as verandert volgens een sinus of cosinus. Als je de tijd en dus de hoekverdraaiing weet kun je ook de verandering uitrekenen in horizontale en verticale richting.

**R103** Leg uit waarom  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  rad/s  
 In  $T$  seconden wordt een hoek afgelegd van  $2\pi$  radialen.  
 Dus de hoeksnelheid  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  rad/s

**R104** In plaats van  $\alpha$  kun je ook de formule  $(\frac{2\pi}{T}t + \alpha_0)$  gebruiken.  
 $\alpha_0$  is de beginhoek (op  $t = 0$ ) en  $\frac{2\pi}{T} \cdot t$  is de afgelegde hoek in  $t$  seconden.  
 In plaats van  $(\frac{2\pi}{T}t + \alpha_0)$  kun je ook  $(2\pi ft + \alpha_0)$  of  $(\omega t + \alpha_0)$  gebruiken.

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{en} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Als je de waarde van de trillende grootheid op  $t = 0$  weet kun je daarmee de beginhoek uitrekenen.

**R105** Voor de uitwijking van een verende massa t.o.v. de evenwichtsstand geldt:  $u(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha_0\right)$ .

Voor de snelheid geldt:  $v(t) = v_{\max} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha_0\right)$ .

Als de maximale waarde in de  $u(t)$ -grafiek bereikt is, is de snelheid 0.

Als  $u(t) = 0$  dan is de snelheid maximaal.

**R106** Geef een verklaring voor de vorm van de grafiek van  $f(x) = \sin^2(x)$  of  $f(x) = (\sin(x))^2$ .

Door het kwadraat is  $\sin^2(x)$  altijd positief.

**R107** Voor punt P geldt:  $y(t) = 4\sin(2,5t + 1)$

Voor punt Q geldt:  $y(t) = 4\sin(2,5t + 2)$

Beide punten liggen op een koord waar een sinusvormige golf doorheen gaat. Beschrijf het verschil in beweging van P en Q. P en Q voeren beide een trilling uit met dezelfde amplitude en frequentie, alleen is er een hoekverschil van 1 rad.

Dus als Q op zijn maximale waarde is, moet P nog  $\frac{1}{2,5} = 0,4$  s

bewegen voordat deze de maximale waarde heeft.

**R108** Als je de cirkelbeweging zou tekenen bij een slinger is het wellicht inzichtelijker om deze  $90^\circ$  te verdraaien.

De hoek van de cirkelbeweging is dan 0 als de uitwijking 0 is.

**R109** Als een punt dat een harmonische trilling uitvoert via een elastische tussenstof of via een elektrische- of magnetische kracht verbonden is met andere punten, dan gaan deze punten ook een harmonische trilling uitvoeren. Hoe verder verwijderd van de bron hoe later deze punten beginnen. In het functievoorschrift is dit te zien aan de beginhoek.

*Punt bij de bron* :  $U(t) = 4\sin(2\pi ft)$

Voor punt op 6,3 golflengtes verder geldt:

$U(t) = 4\sin(2\pi f(t - 6,3T))$



**R110** Bij de vergelijking  $0,4x + 3 = 2,5 + k \cdot 2\pi$  moet je hoek  $x$  uitrekenen.

$$\begin{aligned} 0,4x + 3 &= 2,5 + k \cdot 2\pi \rightarrow 0,4x = -0,5 + k \cdot 2\pi \\ \rightarrow x &= \frac{-0,5}{0,4} + k \cdot 2\pi = -1,25 + k \cdot 2\pi \end{aligned}$$

Dit blijkt niet te kloppen!

*Je moet alles delen door 0,4, dus*

$$\begin{aligned} 0,4x + 3 &= 2,5 + k \cdot 2\pi \rightarrow 0,4x = -0,5 + k \cdot 2\pi \\ \rightarrow x &= \frac{-0,5}{0,4} + \frac{k \cdot 2\pi}{0,4} = -1,25 + k \cdot 5\pi \end{aligned}$$

**R111**  $2\sin(x + 2) > A$

De maximale waarde van  $A = 2$

$2\tan(3x - 1) < B$

$B$  heeft geen maximale waarde, de tangens is oneindig als  $(3x - 1) = \pi/2$