Exact competentiegericht

Statistiek voor het laboratorium

T.J. Kleintjes

"Statistiek betekent dat je nooit hoeft te zeggen dat je het zeker weet"

C.J. Bradfield

Didactisch concept : Vervoort Boeken
Grafisch ontwerp: uwontwerp.nl Eindhoven
Versie juli-2015

ISBN 978-90-79798-01-8.

Verantwoording

Dit onderdeel van de methode is bedoeld voor iedereen die zijn vaardigheden en basiskennis van de statistiek wil verbeteren. Voor bedrijven en instellingen is het leveren van *kwaliteit* aan de klanten van levensbelang. Daarom is de laatste jaren het vak *kwaliteitszorg* sterk ontwikkeld. Omdat kwaliteitszorg sterk op statistiek leunt, is het van belang dat je daar als moderne werknemer iets van weet en kunt gebruiken tijdens je werk.
Ook in dit deel worden reflectievragen gebruikt om meer inzicht en overzicht te krijgen. Je maakt ook hier weer je eigen toolboek dat je kunt inzetten bij de diagnostische toetsen en beroepsopdrachten.
De vele interactieve oefeningen op internet en het gebruik van Excel en SPSS zijn bijzonder geschikt om de rekenvaardigheid onder de knie te krijgen.

De site www.vervoortboeken.nl is een belangrijke ondersteuning. Hier zijn hulpmiddelen te vinden zoals voorbeeldtoetsen, links naar internetsites, filmpjes, afbeeldingen voor je toolboek, powerpointtools, Excel-tools en extra uitleg.
De links naar internet verwijzen door naar sites met simulaties of oefenmogelijkheden. De afbeeldingen zijn te gebruiken voor het toolboek. Sommige schema's of didactische tips hoef je niet zelf te bedenken.

Heel veel succes!

Speciale dank gaat uit naar de collega's Claartje Eggermont, Nazli Evlek, Franca van de Loo en Jos Vervoort voor hun opbouwende ondersteuning,

Gebruikte iconen :

	**Reflectievragen**
	**Samenvatting voor toolboek**
	**Verwijzing naar internetsite**
	**Leergesprek op de site http://www.vervoortboeken.nl**
	**Excel-tool op de site http://www.vervoortboeken.nl**

Waarom de rood gekleurde woorden in de tekst?

Maak achterin je toolboek voor jezelf een register waarin je zelf de betekenis van deze woorden of begrippen beschrijft.
Neem 1 bladzijde per letter.

Gebruik werkschrift en toolboek?

Een A4 ruitjesschrift is het meest geschikt als werkschrift.
Werk de R-vragen en de opgaven uit in de volgorde van het werkboek. De R-vragen zijn het belangrijkst. De S-vragen zijn bedoeld als tips voor het toolboek.
Gebruik als toolboek een schrift met harde kaft. Dit boekje kun je gebruiken bij de diagnostische toetsen maar uiteraard ook bij de beroepsgerichte opdrachten.
Op de site www.vervoortboeken.nl zijn voorbeeldtoetsen, links en andere tools te vinden.

Inhoudsopgave

1 Precisie en juistheid

2 Meetwaarden verschillen. Hoe komt dat?

3 Spreiding van data (meetresultaten)

4 Uitschieters bepalen en afronden

5 Normaalverdeling

Statistische Begrippen **opgave**

6 Van steekproef naar populatie

Statistische Begrippen **opgave**

7 Kwaliteitszorg (controlekaarten)

Statistische Begrippen **opgave**

8 Correlatie en regressie

Statistische Begrippen **opgave**

9 Testen van meetresultaten

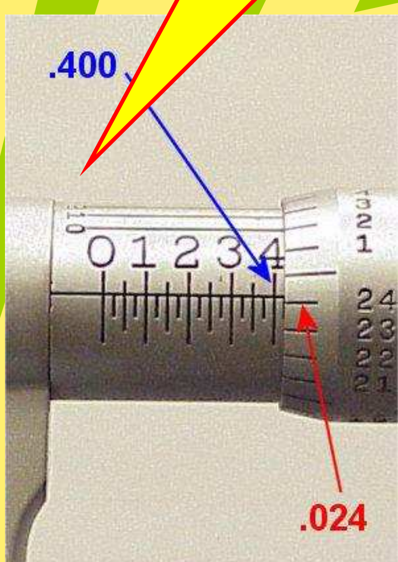
10 Extra oefeningen

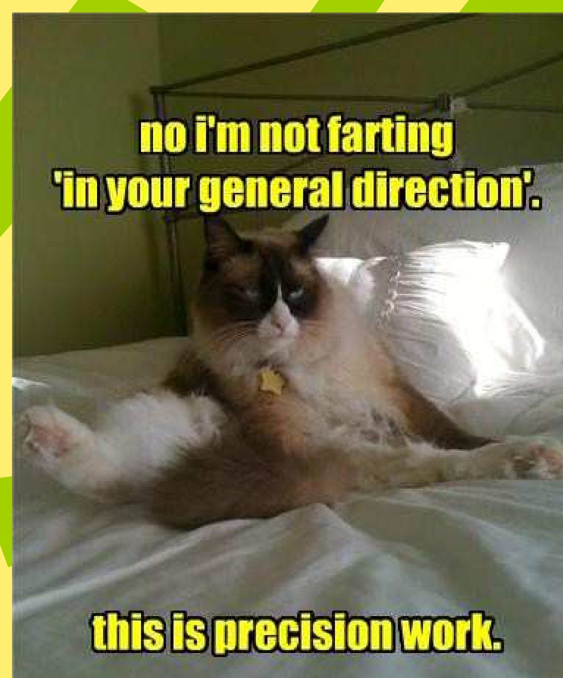
1 Precisie en juistheid

precisieschroevendraaiers

precies en/of juist?

heel precies lengtes meten





Kwaliteit leveren
Van iedere beroepsbeoefenaar wordt verwacht dat hij (of zij) zijn (of haar) werk goed doet. Daarom is een van de eigenschappen die je nodig hebt om je beroep goed te kunnen uitvoeren de eigenschap *Kwaliteit leveren*. Dus producten - goederen en diensten - van goede kwaliteit leveren.
Als analist moet je daarom je werk ook zelf kunnen beoordelen op kwaliteit.
De centrale vraag daarbij is:

Hoe krijg ik betrouwbare resultaten?
Hoe kan ik dat zelf beoordelen?

Om die vraag te kunnen beantwoorden op een professioneel niveau, moet je inzicht hebben in alles wat de kwaliteit van je producten beïnvloedt en een getalsmatige schatting kunnen maken van die invloeden op het resultaat.

In dit boekje krijg je gereedschappen aangereikt waarmee je een uitspraak kunt doen over de resultaten die je vindt bij werken in een laboratorium.

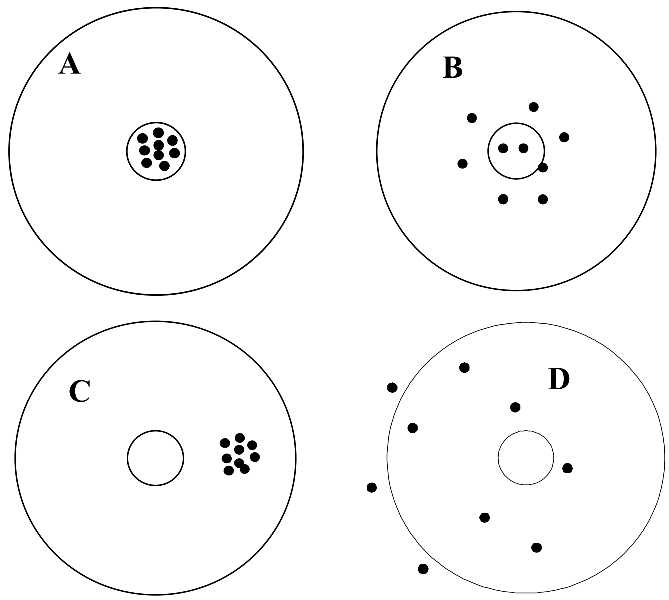
Als je als analist uitslagen doorgeeft moet je kunnen zeggen hoe betrouwbaar ze zijn. Belangrijke kenmerken daarvan zijn de **precisie** en de **juistheid**.

Aan een uitslag van 12,5 g/L heeft een opdrachtgever niets als je er niet bij kunt vermelden hoeveel % de precisie is.

Opgave 1.1

Precisie en juistheid bij het schieten
Een voorbeeld van precies en juist vinden we bij schieten op een schietschijf.

Vier schutters hebben schoten afgevuurd. Zie volgende pagina.



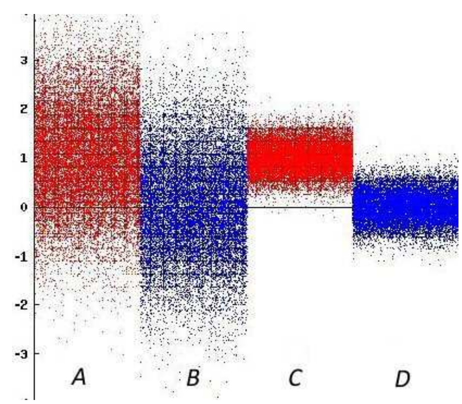
Welke kwalificatie hoort bij welk plaatje ?

1. precies en juist
2. niet precies en onjuist
3. precies en onjuist
4. niet precies en juist

Geef in het antwoord aan welk cijfer bij welke letter hoort.

Opgave 1.2 **Precisie en juistheid van metingen**

Ook als je heel veel metingen doet, kun je dit herkennen. Ieder puntje in de figuur rechts is een meetwaarde. Er zijn vier verschillende meetmethoden gebruikt.



Welke kwalificatie hoort bij welke meetmethode?

1. precies en juist
2. precies en onjuist
3. niet precies en juist
4. niet precies en onjuist

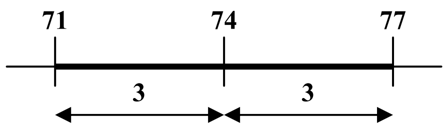
Opgave 1.3 **Hoe precies is een meting bij een bepaalde meetmethode?**

Bij een apparaat of methode is de precisie bekend.

Voorbeeld

De politie heeft mijn snelheid gecontroleerd en 74 km/h gemeten. De meetmethode heeft een nauwkeurigheid van 3 km/h.
Dat betekent dat de meetresultaten maximaal 3 km/h kunnen afwijken.
Het resultaat noteer je als: $\boldsymbol{v} = \mathbf{74 \pm 3}$ **km/h**.
In plaats van nauwkeurigheid kun je beter spreken van **onnauwkeurigheid**.

De meting met onnauwkeurigheid kun je tekenen als een **interval** op een getallenlijn:



De meting heeft dan een **absolute onnauwkeurigheid** van 3 km/h. Je kunt dit ook relatief weergeven dus in procenten, die noem je dan de **relatieve onnauwkeurigheid**.

relatieve onnauwkeurigheid

$$\boxed{\text{relatieve onnauwkeurigheid} = \frac{\text{absolute onnauwkeurigheid}}{\text{gemeten waarde}}}$$

$$\text{relatieve onnauwkeurigheid} = \frac{3}{74} \times 100\,\% = 4{,}1\,\%$$

twee notaties van onnauwkeurigheid

met absolute onnauwkeurigheid	$v = 74 \pm 3$ km/h
met relatieve onnauwkeurigheid	$v = 74$ km/h $\pm\ 4{,}1$ %

Van een andere wegmisbruiker wordt de snelheid bepaald op 135 km/h.

a Geef de juiste notatie van deze meting met absolute en relatieve onnauwkeurigheid.
b Maak ook een tekening van het interval.

Opgave 1.4

Meer metingen doen: duplo en triplo (meetonnauwkeurigheid bekend)
Je kunt de precisie van de meting beter maken door de meting te *herhalen*.
De precisie neemt dan toe met een factor $\sqrt{n}$ ($n =$ aantal metingen).

onnauwkeurigheid bij *n* metingen

Bij n metingen wordt de meting $\sqrt{n} \times$ nauwkeuriger.
Met 4 metingen is de meting $\sqrt{4} = 2 \times$ nauwkeuriger dan met 1 meting. Daar heb je natuurlijk alleen iets aan als de meetonnauwkeurigheid al bekend is.

Bij een bepaalde meetmethode voor het zoutgehalte van water geldt een absolute onnauwkeurigheid van 15 mg/L.
Er is een gehalte gemeten van 126 mg/L.

a Bereken de relatieve onnauwkeurigheid.

De meting wordt herhaald. Men noemt dat een meting in **duplo**.

b Bereken de nieuwe absolute onnauwkeurigheid. Hoever moet je hier afronden?

c Bereken het gemiddelde en de nieuwe onnauwkeurigheid en geef de uitslag in de twee notaties.

d Vul de tabel verder in:

2 x zo nauwkeurig betekent dat de onnauwkeurigheid 2 x zo klein is

Aantal metingen (n)	onnauwkeurigheid
1	± 15
2	± …
3	± …
4	± …
…..	± 5

Het zoutgehalte wordt nog tweemaal gemeten . Je hebt dan een **triplo** bepaling:

Zoutgehalte (mg/L)		
monster 1	**monster 2**	**monster 3**
126	129	127

Opgave 1.5

Meetonnauwkeurigheid onbekend

Jij hebt in triplo het vetgehalte van chips bepaald. De nauwkeurigheid van de meetmethode is niet bekend.

Vetgehalte van chips (g/100g)		
monster 1	**monster 2**	**monster 3**
33,2	32,8	35,5

a Teken deze waarden op een getallenlijn.

Het verschil tussen laagste en hoogste waarde wordt de **spreidingsbreedte** (symbool w) van je resultaten genoemd.

spreidingsbreedte

spreidingsbreedte w = hoogste waarde – laagste waarde

in het Engels: **range** symbool R

b Bereken de spreidingsbreedte bij de vetmeting van chips.
c Bereken de gemiddelde waarde.
d Bereken de grootste afwijking t.o.v. het gemiddelde.

Zoals misschien al bekend wordt dit getal vaak de **spreiding** genoemd.

spreiding absoluut

spreiding = grootste afwijking t.o.v. het gemiddelde

De spreiding kan ook relatief, dus in procenten worden opgegeven.

spreiding relatief

$$\text{spreiding} = \frac{\text{grootste afwijking t.o.v. het gemiddelde}}{\text{gemiddelde}} \times 100\%$$

01

e Wat zou je nu opgeven als absolute onnauwkeurigheid?
f Bereken de relatieve onnauwkeurigheid.
g Noteer het meetresultaat op twee manieren.

1.1

Bij standaard chemische bepalingen met alleen wegen en glaswerk wordt een relatieve onnauwkeurigheid van 3 % t.o.v. het gemiddelde vaak als betrouwbaar gezien.

R1 Verzin 3 waardes van een bepaling met een onnauwkeurigheid van 3 %.
R2 Verzin 3 waardes die een nauwkeurigheid opleveren van 50 %.
R3 Wat kun je zeggen over de absolute nauwkeurigheid van jouw twee voorbeelden?
R4 Kun je ook iets zeggen over de juistheid?
R5 Waarom is de relatieve onnauwkeurigheid in % een betere maat voor de precisie dan de absolute onnauwkeurigheid? Laat dit eens zien met een getallenvoorbeeld

Opgave 1.6

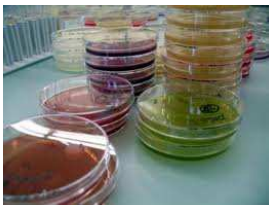
Het suikergehalte van cola

Van cola is het suikergehalte bepaald.
De meting is in viervoud gedaan.

Suikergehalte van cola (g/100 mL)			
1	**2**	**3**	**4**
8,8	9,3	8,6	9,0

Bereken het gemiddelde van jouw meetwaarden met absolute en relatieve onnauwkeurigheid (spreiding).

Opgave 1.7 **Bacteriën tellen**



Bij een bacterietelling zijn op twee 10^{-4} platen 1 mL 10^{-4} verdund monster opgebracht. Er worden 37 en 65 KVE geteld.
Bereken de KVE/mL waarde van het monster met absolute en relatieve onnauwkeurigheid (spreiding).

Opgave 1.8 **Juistheid van een meting bepalen**

Juistheid kan bepaald worden door een monster in de bepaling mee te nemen waarvan je "exact" weet wat er uit zou moeten komen. Zo'n monster wordt een **controlemonster** genoemd.
Er zijn verschillende manieren om aan een controlemonster te komen.

- Zelf aanmaken in het lab en vervolgens zelf zo nauwkeurig mogelijk de waarde bepalen.
- Referentiestoffen kopen (bij o.a. NMI en RIVM). Deze stoffen worden CRM's genoemd: Certified Reference Material.

Je hebt ijzer in oppervlaktewater bepaald. Bij de analyse is een controlemonster meegenomen.

IJzergehalte in oppervlaktewater (mg/L)		
monster 1	**monster 2**	**controle monster (CRM)**
4,6	4,3	6,2 ± 0,1

a Leg uit waarom dit nog niets zegt over de juistheid van *jouw* metingen.

Je hebt het gehalte kopersulfaat in afvalwater bepaald. Bij de analyse is weer een controlemonster meegenomen.

Kopersulfaat in afvalwater (µg/L)					
monster 1	**monster 2**	**monster 3**	**monster 4**	**controle monster theoretisch**	**controle monster gemeten**
24,3	24,5	24,0	24,2	27,3 ± 0,2	27,4

b Bereken het gemiddelde van jouw meetwaarden met absolute en relatieve onnauwkeurigheid.

c Kun je nu wel een uitspraak doen over de juistheid?

Opgave 1.9

Het ℮-teken

Op de verpakking van levensmiddelen staat achter de hoeveelheid het **teken ℮**. Dit teken (EU-teken of **estimated symbol**) geeft aan hoeveel de inhoud mag afwijken, zie tabel:

℮

Betekenis ℮ teken		
Aangeduide hoeveelheid (g of mL)	% fout	absolute fout (g of mL)
Van 5 tot 50	9	
Van 50 tot 100		4,5
Van 100 tot 200	4,5	
Van 200 tot 300		9
Van 300 tot 500	3	
Van 500 tot 1000		15
Van 1000 t/m 10.000	1,5	

a Hoeveel g mag een zak chips van 200 g afwijken?

b Tussen welke waarden moet het gewicht dan liggen?

c Hoeveel mL mag een fles ketchup van 175 mL afwijken?

d Hoeveel % mag een fles fritessaus van 265 mL afwijken?

1.1

S1 Wat is het verschil tussen precisie en juistheid? Geef een voorbeeld.

S2 Wat is het verschil tussen absolute en relatieve onnauwkeurigheid? Geef voorbeelden.

S3 Hoe kun je de precisie van een meting verbeteren?

S4 Hoe verandert de (on)nauwkeurigheid als je *n* metingen doet i.p.v. één?

S5 Wat wordt bedoeld met spreidingsbreedte?

S6 Hoe bereken je de spreiding bij 3 of meer meetwaarden?

S7 Is de spreiding een maat voor de precisie? Leg uit.

S8 Je hebt van een monster bepaald dat het gehalte 15 mg/L is. Op de fles staat 20 mg/L. Is je meting onjuist? Leg uit.

S9 Wat is een CRM? Waarvoor en hoe wordt het gebruikt? Hoe kom je er aan? Hoe ga je er mee om?

S10 Wat betekent het ℮-teken? Geef een voorbeeld.

2 Meetresultaten verschillen. Hoe komt dat?

moeilijk aflezen

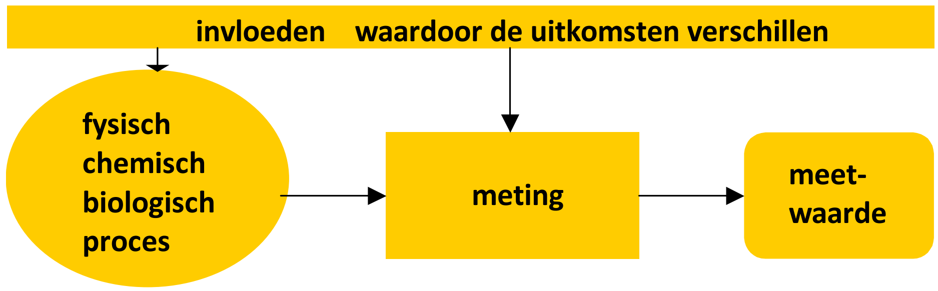
hoe nauwkeurig is de snelheidsmeter?

invloeden waardoor de uitkomsten verschillen

fysisch
chemisch
biologisch
proces

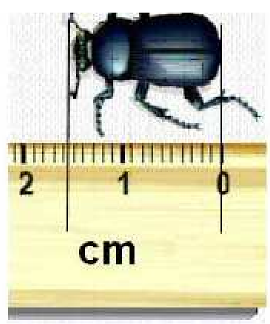
→ meting → meet-waarde

Meetfouten
Bij iedere meting treden onnauwkeurigheden of meetfouten op. Deze zorgen ervoor dat je nooit twee keer precies hetzelfde kunt meten. In een schema:

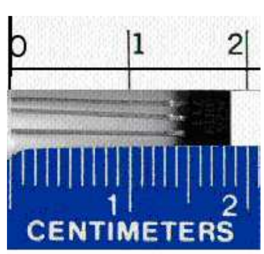


De invloeden kunnen op twee manieren uitwerken:
1. **toevallige meetfouten**; deze bepalen de nauwkeurigheid (precisie) van een meetmethode.
2. **systematische meetfouten**; deze bepalen de juistheid van een meetmethode.

Opgave 2.1 **Toevallige meetfout door de waarnemer**
Lees de lengte van de kever zo nauwkeurig mogelijk af. Hoeveel cijfers achter de komma kun je aflezen?

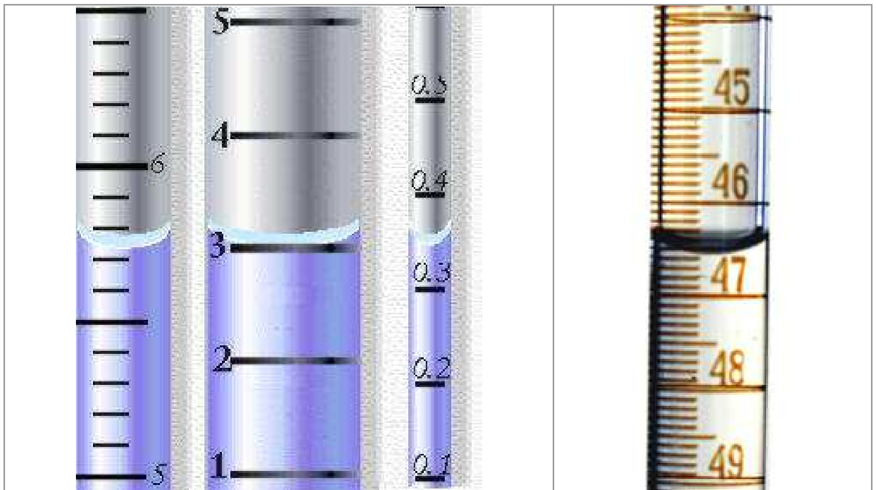


Opgave 2.2 **Meer streepjes is nauwkeuriger?**



Lees de lengte van het voorwerp (een transistor) af op de twee linialen. Hoeveel decimalen kun je aflezen? Het ene instrument is blijkbaar het andere niet.

Opgave 2.3 Afleesonnauwkeurigheid bij glaswerk



Op de linker maatcilinder lezen we af: 5,73 mL. Het zou misschien ook wel 5,74 mL of 5,72 mL kunnen zijn. De afleesonnauwkeurigheid is dus 0,01 mL. Dit is een toevallige meetfout.

a Lees de andere twee maatcilinders af en bepaal voor beiden de afleesonnauwkeurigheid.

b Lees zelf nu ook de buret af met afleesonnauwkeurigheid.

Afleesonnauwkeurigheid

De **afleesonnauwkeurigheid** is de onzekerheid in de schatting van het laatste cijfer. Het geeft een getal in dezelfde eenheid als de meetwaarde. Het is een toevallige onnauwkeurigheid en hij heeft invloed op de precisie van het **eindresultaat**.

Een collega heeft een andere buret met een nieuwe oplossing gevuld en twee keer afgelezen. Zie figuur rechts.
De afleesonnauwkeurigheid is op 0,03 mL geschat.

c Bereken voor beide metingen de relatieve afleesonnauwkeurigheid.

d Wat is je conclusie?

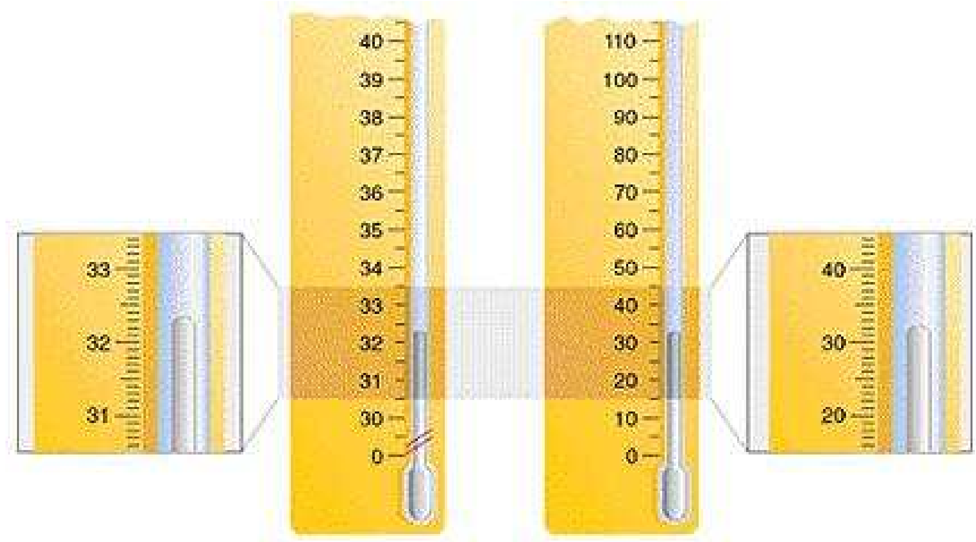
Opgave 2.4 **De schaalverdeling bepaalt hoe goed je kunt aflezen**

a Beschrijf wat het verschil is tussen de twee thermometers.

b Lees beide thermometers zo nauwkeurig mogelijk af.

c Bepaal de afleesonnauwkeurigheid in beide gevallen.

d Op welke thermometer kun je het beste een temperatuur aflezen?



2.1

kleinste schaaldeel = verschil tussen twee streepjes

R1 Op een maatcilinder is 23,10 mL afgelezen. Hoeveel significante cijfers heeft deze meetwaarde?

R2 Hoeveel mL lagen de streepjes van de schaalverdeling uit elkaar (**kleinste schaaldeel**)? Maak een tekening.

R3 Welk van de 4 cijfers van de meetwaarde heeft de grootste onzekerheid?

R4 Hoeveel significante cijfers kun je aflezen bij een buret (opgave 2.3)?

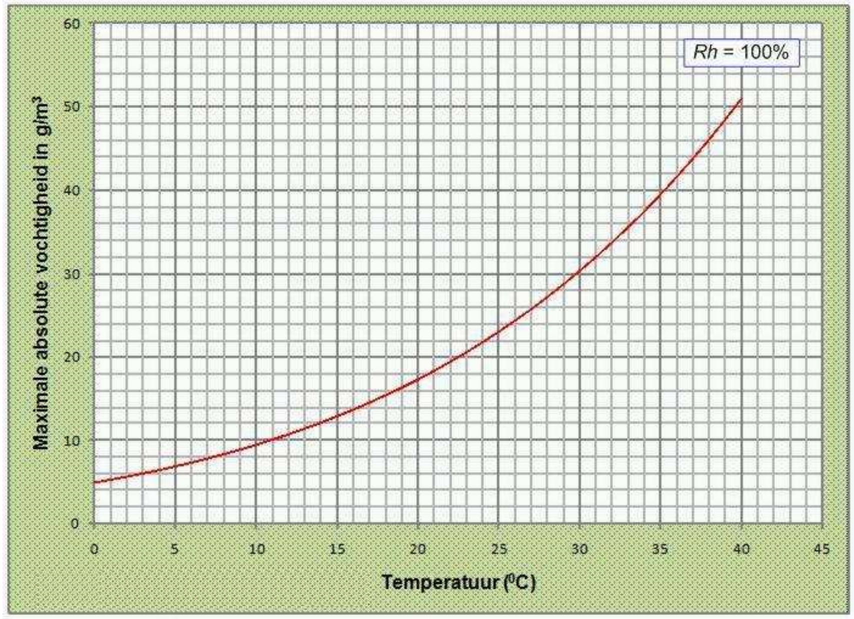
R5 Hoe groot is de onnauwkeurigheid bij het aflezen van een buret?

R6 Is het slim om waarden tussen 0 en 10 mL af te lezen op een buret? Leg uit.

R7 Waarom is meetonnauwkeurigheid een beter woord dan meetfout?

Opgave 2.5 **Toevallige fout bij aflezen van grafieken**

Ook bij het aflezen van een grafiek doet zich een afleesfout voor. Bekijk de grafiek met maximale absolute vochtigheid als functie van de temperatuur.



Bij een bepaling van de relatieve vochtigheid met de dauwpunt-methode heb je twee temperaturen gemeten, namelijk:
kamertemperatuur = 21,3 °C
dauwpunt = 6,7 °C.

a Lees de twee waarden in de grafiek af en noteer ze met absolute en relatieve onnauwkeurigheid.
b Bereken de relatieve vochtigheid.

Je kunt de onnauwkeurigheid in het eindresultaat berekenen dor de *relatieve* onnauwkeurigheden van de twee waarden op te tellen.
c Bereken de onnauwkeurigheid in het eindresultaat, zowel absoluut als relatief.

Opgave 2.7 **Systematische fout bij een liniaal**
De meeste fouten die optreden zijn **toevallige fouten**. Maar soms treden er ook systematische fout en op.
Een voorbeeld: op de liniaal hieronder wordt de lengte van een kaartje afgelezen: 8,0 cm.

a Bij het aflezen treedt een **systematische fout** op. Leg uit wat er fout gaat.
b Hoe groot is deze systematische fout?

Je hebt niks in de gaten en gaat vrolijk verder met alle metingen met deze liniaal.
c Wat kun je doen als je pas later achter de fout komt en toch niet alles opnieuw wilt meten?

Opgave 2.8

Systematische fouten
Bedenk hoe je een systematische fout kunt krijgen bij:
a een analytische balans of een bovenweger;
b een pH-meter;
c een spectrofotometer;
d een maatkolf (temperatuur!).

Opgave 2.9

Systematische fout: de instrumentonnauwkeurigheid
Op een thermometer staat soms ± 0,5 °C.
Hiermee wordt door de fabrikant aangegeven hoeveel de afgelezen waarde maximaal ***kan*** afwijken van de werkelijke waarde. Dit getal wordt instrumentonnauwkeurigheid genoemd.

instrumentonnauwkeurigheid

De **instrumentonnauwkeurigheid** is het getal dat aangeeft hoeveel de afgelezen waarde, door de kwaliteit van het instrument, maximaal *kan* afwijken van de werkelijke waarde.
Hij heeft invloed op de juistheid van het eindresultaat.

instrumentonnauwkeurigheid bepalen

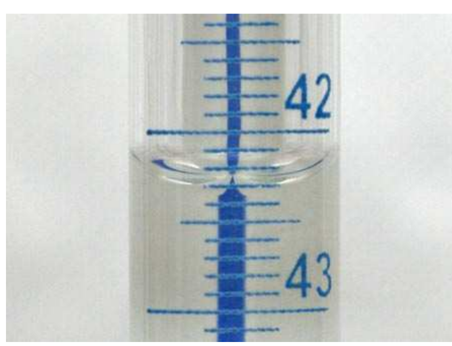
kleinste schaaldeel = verschil tussen twee streepjes

- hij staat op het instrument (voorbeelden: glasthermometer, maatkolf, pipet, schuifmaat);
- hij is te vinden in de manual (handleiding);
- als er niets op staat of als de handleiding kwijt is nemen we:
  - ½ **kleinste schaaldeel** bij een **analoog** instrument
  - 1 *kleinste* schaaldeel bij een **digitaal** instrument

a Lees de meters af en bepaal de afleesonnauwkeurigheid en instrumentonnauwkeurigheid.

b Lees de thermometer af en bepaal de afleesonnauwkeurigheid en de instrumentonnauwkeurigheid.

c Lees de buret af en noteer de meetwaarde met de afleesonnauwkeurigheid en de instrumentonnauwkeurigheid.



Opgave 2.10

Wat doe je met twee onnauwkeurigheden?

In het slechtste geval (Eng: worst case) versterken de afleesonnauwkeurigheid en de instrumentonnauwkeurigheid elkaar.

a Leg dit eens uit met een voorbeeld.
b Lees de thermometer af (links).
c Bepaal de afleesonnauwkeurigheid.

De instrumentonnauwkeurigheid is volgens de fabrikant 2 schaaldelen.

d Hoe groot is die dus?
e Hoeveel kan de afgelezen waarde dus maximaal afwijken.

Vaak zullen de twee afwijkingen elkaar in evenwicht houden. We berekenen dan de **kwadratische optelling** van de twee optredende onnauwkeurigheden:

gecombineerde (of totale) onnauwkeurigheid

$$\text{gecombineerde onnauwkeurigheid} = \sqrt{\text{onn.heid}_1^{\,2} + \text{onn.heid}_2^{\,2}}$$

02

f Bereken de gecombineerde of totale onnauwkeurigheid.
g Noteer de meetwaarde op de juiste wijze.
h Hoe groot is de relatieve onnauwkeurigheid?

Vaak kun je ook gewoon de grootste van de 2 onnauwkeurigheden noteren.

i Laat zien dat dat klopt bij de thermometer.

Opgave 2.11

Twee onnauwkeurigheden 1

Bij een meting van het hormoon hCG in het bloed treden twee variaties (onnauwkeurigheden) op: de variatie in een patiënt (de **biologische variatie**) en de spreiding in de meetmethode (de **analytische variatie**).
De analytische variatie is bijvoorbeeld 8 % en de totale variatie 12 %.
Bereken de biologische variatie.

Opgave 2.12

Twee onnauwkeurigheden 2

Bij het testen van een meetmethode vindt men een totale onnauwkeurigheid van 0,45 mg/L. De methode zelf heeft een onnauwkeurigheid van 0,30 mg/L. De rest moet door de analist zijn veroorzaakt. Bereken die onnauwkeurigheid.

Opgave 2.13 **Verschilmeting**

Met een buret heb je twee volumes afgelezen

Buretaflezing	
V_{begin} (mL)	35,18
V_{eind} (mL)	11,56
afleesonnauwkeurigheid (mL)	0,02
instrumentonnauwkeurigheid (mL)	0,05

a Bereken het toegevoegde volume vloeistof.

b De instrumentonnauwkeurigheid van 0,05 is een systematische onnauwkeurigheid. Wat betekent dat?

c Stel dat de instrumentonnauwkeurigheid +0,04 mL is, wat betekent dat dan voor het toegevoegde volume vloeistof?

d Bereken de onnauwkeurigheid in het resultaat.

e Noteer de volgende regel:

verschilmeting en onnauwkeurigheid

Bij een verschilmeting met één instrument hoef je alleen rekening te houden met de afleesonnauwkeurigheid

Opgave 2.14 **Instrumentonnauwkeurigheid in de manual**

Van onderstaande precisiethermometer zijn de specificaties:

	Specifications:	
	Range:	-99.9 to 199.9°F, -99.9 to 199.9°C
	Resolution:	0.1°F or °C
	Accuracy:	±0.4°F (±0.2°C)
	Probe:	not included, 3-wire, 100 ohm platinum RTD, IEC 751 (DIN 43760)
	Battery:	9V, 200 hours
	Dimensions:	5.8” x 3.15” x 1.42”

a Hoe groot is het kleinste schaaldeel waarop je dit instrument kunt aflezen?

b Hoe groot is de instrument(on)nauwkeurigheid?

c Hoeveel % kan deze thermometer afwijken bij een gemeten temperatuur van 115,8 °C?

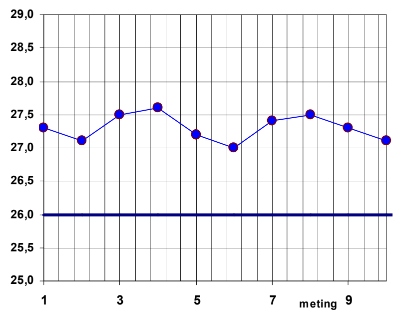
2.2

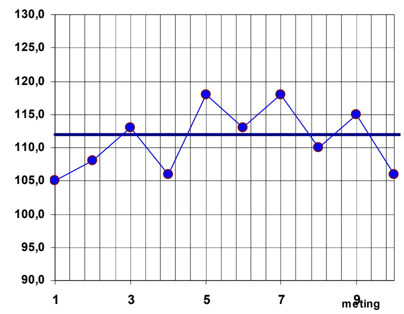
R8 De instrumentonnauwkeurigheid van een bepaalde thermometer is 0,5 °C. Betekent dat dat alle thermometers 0,5 °C afwijken?

R9 Wat zegt de term **worstcase** in dit geval?

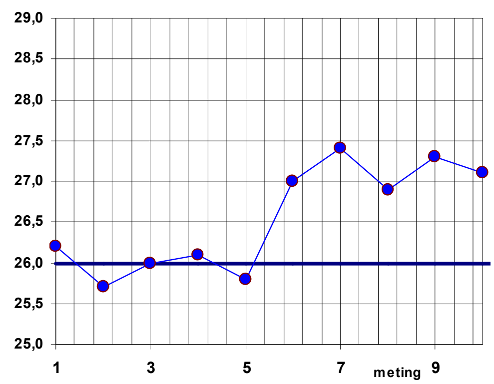
R10 Als je met 10 van deze thermometers de temperatuur van hetzelfde bekerglas water afleest, wat kun je dan verwachten?

R11 In de afbeeldingen hieronder zie je steeds een aantal meetwaarden of uitslagen van hetzelfde verschijnsel. De donkere lijn geeft de werkelijke waarde. Bepaal waar systematische en waar toevallige fouten optreden. Maak ook een schatting van een eventuele systematische fout.





R12 Wat kan er bij de metingen hiernaast fout zijn gegaan?



R13 Beredeneer welke invloed een *toevallige* fout heeft op de precisie en de juistheid van een meting.

R14 Beredeneer welke invloed een *systematische* fout heeft op de precisie en de juistheid van een meting.

Opgave 2.15 Een moderne thermometer

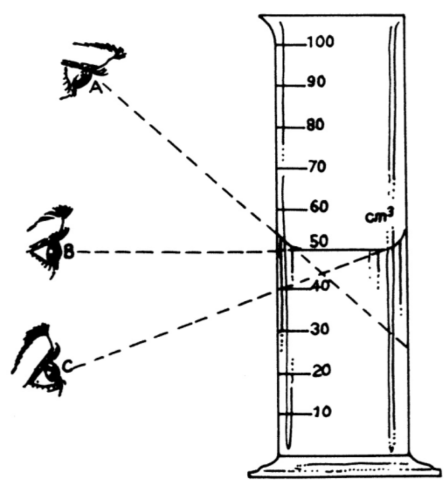
This Neiko USA Infrared Thermometer is excellent for reading surface temperatures without making contact. Just point, pull, and read!
Features:
Laser Aiming
Temperature range: -30 to 550C
Accuracy:
+/- 3C or +/-3% of reading -30 to 0C
+/- 2C or +/-2% of reading 0 to 100C
+/- 3C or +/-3% of reading > 100C
Respond Time: 500mSEC, 95%

a Hoe werkt deze thermometer en wat is het voordeel ervan?
b Hoe groot is de afwijking (instrumentonnauwkeurigheid) maximaal als je 342 °C afleest?
c Waarom heb je hier geen last van een afleesonnauwkeurigheid?

Opgave 2.16 Andere foutbronnen

Zoals eerder vermeld kunnen er nog veel andere invloeden onnauwkeurigheden veroorzaken in de uitslagen van metingen.

Het voorbeeld hiernaast noemt men **parallax**.



a Bekijk wat hier mis gaat.
b Bedenk nog een voorbeeld waar zich dat voordoet.
c Welke waarden lezen A, B en C af?
d Hoeveel % zitten ze er naast?

2.1

S1 Wat is verschil tussen toevallige en systematische meetfouten? Geef voorbeelden.

S2 Hoe beïnvloeden ze de juistheid en precisie van de meting?

S3 Wat wordt bedoeld met afleesonnauwkeurigheid? Geef voorbeelden.

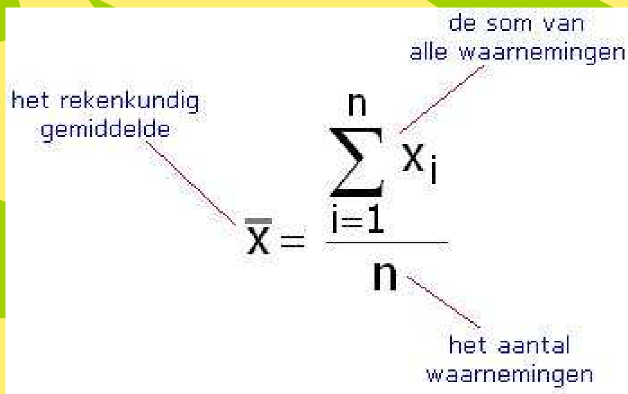
S4 Wat is de instrumentonnauwkeurigheid? Hoe kun je die vinden? Geef voorbeelden.

S5 Wat hebben significante cijfers met metingen te maken?

S6 Hoe en waarom noteer je een meetwaarde als je gevonden hebt:
afgelezen: $U = 15{,}4$ V
afleesonnauwkeurigheid = 0,1 V
instrumentonnauwkeurigheid = 0,3 V?

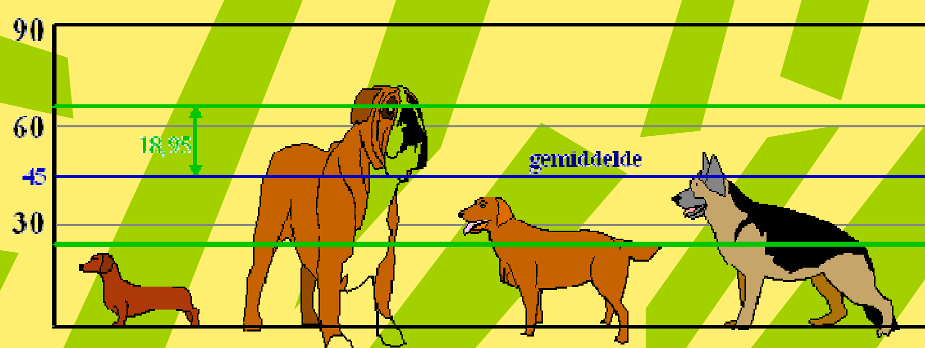
S7 In bijlage 8 staat een mindmap van onnauwkeurigheden. Kijk of deze jou kan helpen meer overzicht te krijgen over alle begrippen.

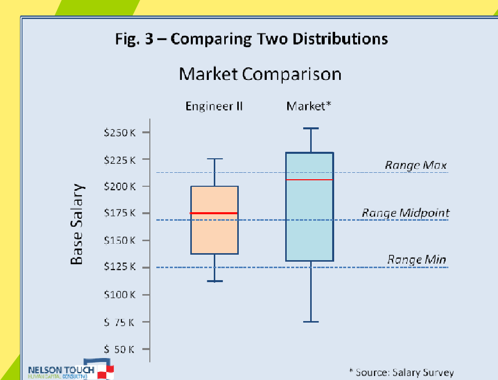
3 Spreiding van data (meetresultaten)

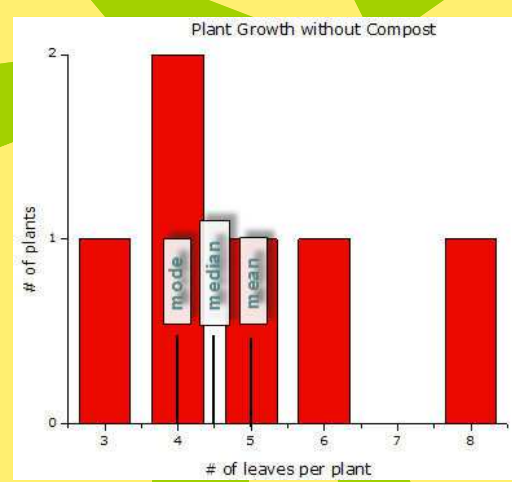


"Je beste maat is de middelmaat."

Arnold Kroon







Opgave 3.1

Steekproef en populatie

Voor het ontwerpen van huizen, wil men weten of de gemiddelde lengte van de Nederlander nog steeds stijgt. Voor dit onderzoek vormen alle Nederlandse mannen samen een **populatie**.
In een bierbrouwerij wordt het product bier op kwaliteit gecontroleerd. Alle flesjes bier die dagelijks worden geproduceerd vormen ook een populatie.

a Leg uit waarom het niet praktisch is in deze twee gevallen de hele populatie te onderzoeken.

In plaats daarvan neemt men een **steekproef** of **monster** uit de populatie. Een steekproef moet **aselect** en **representatief** zijn.

Aselecte steekproef

Alle elementen uit de populatie hebben dezelfde kans om in de steekproef te worden opgenomen. Het is dus puur toeval of iets of iemand in de steekproef zit en er wordt niet uitgezocht (selecteren = uitzoeken).

Representatieve steekproef

De steekproef moet een vergelijkbare verdeling vertonen als de populatie. Bij een populatie mensen waarvan de helft uit vrouwen bestaat moet de steekproef ook voor de helft uit vrouwen bestaan.

b Kan elk van de volgende groepen een populatie zijn? Geef een voorbeeld van wat onderzocht kan zijn.
- alle meisjes op het Roc;
- alle meisjes bij de laboratoriumopleiding;
- alle meisjes in het eerste jaar van de opleiding;
- alle meisjes in klas LA1C.

c Een reclamebureau doet onderzoek naar de populariteit van klassieke muziek en stuurt zijn vragenlijsten naar postcodes in de villawijken. Wat gaat hier verkeerd?

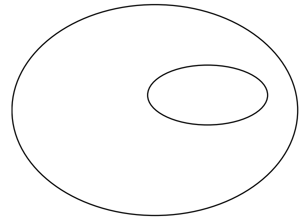
d Een analist neemt een monster boven uit een fles met een troebele oplossing en ziet niet dat een laag bezinksel op de bodem ligt. Wat zegt dit over zijn monster?

3.1

R1 Bedenk zelf een voorbeeld van een steekproef die niet aselect wordt uitgevoerd.

R2 Bedenk zelf een voorbeeld van een steekproef die niet representatief wordt uitgevoerd.

R3 In de figuur rechts zie je schematisch het verband tussen een populatie en een steekproef. Neem de tekening over en zet deze woorden op de juiste plaats in het schema.



R4 Soms is het noodzakelijk om wel een hele populatie te onderzoeken. Geef eens een medisch voorbeeld

Opgave 3.2

Spreidingsbreedte en centrummaten

In het lab is door middel van het nemen van 10 monsters het gehalte stikstof van een partij kunstmest bepaald.

Gehalte stikstof in kunstmest (m%)				
13,8	14,0	13,9	14,2	14,5
14,5	14,8	14,1	13,9	13,7

a Is hier sprake van een populatie of een steekproef?

b Bepaal de spreidingsbreedte (range).

c Teken een getallenlijn en zet daarop alle meetwaarden uit.

d Bereken de gemiddelde waarde en zet deze ook op de getallenlijn.

03

Behalve de gemiddelde waarde zijn er nog meer **centrummaten**: de **mediaan** (symbool *M*) en de **modus.**

mediaan en modus

De mediaan is de *middelste waarde* wanneer de resultaten van laag naar hoog zijn genoteerd.
De modus is de meest voorkomende waarde (dus de waarde met de hoogste **frequentie**).

Bij een even aantal waarden is er geen middelste waarde. Men neemt dan het gemiddelde van de twee waarden links en rechts van het midden.
Voorbeelden:

5, 6, 8, 9, 9, 10, 11, 12, 14

M = mediaan = 9
n = 9 (meetwaarden)
modus = 9

5, 6, 8, 9, 9, 10, 11, 12, 13, 14

M = mediaan = 9,5
n = 10 (meetwaarden)
modus = 9

e Bepaal de mediaan bij de stikstofbepaling en geef deze ook aan op de getallenlijn.

f Bepaal ook de modus bij de stikstofbepaling en geef deze ook aan op de getallenlijn.

Opgave 3.3

Lichaamslengte

We gaan de lichaamslengte van Nederlandse mannen meten. Dat doen we door een steekproef te nemen van 10 studenten.

Lichaamslengte (cm) van 10 studenten				
167	176	182	188	173
175	184	179	180	184

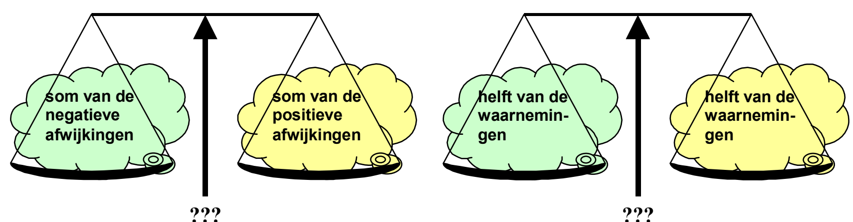
a Maak een getallenlijn met gemiddelde, mediaan en modus.

3.2

R5 Bepaal van alle meetwaarden de afwijking t.o.v. het gemiddelde (boven het gemiddelde is de afwijking positief en onder het gemiddelde negatief).

R6 Laat zien dat de optelling van deze afwijking op *nul* uitkomt. Waarom is dit ook wel te verwachten?

R7 Wat moet er op onderstaande plaatjes bij de vraagtekens staan? Mediaan, modus of gemiddelde?



De getallen: gemiddelde, mediaan en modus zeggen samen iets over de verdeling van de waarnemingen.

Opgave 3.4

Examenscore

Door studenten zijn voor een examen de volgende scores behaald:

stam-blad diagram

4 | 5 6 8
5 | 3 4 5 6 9
6 | 2 3 5 6 6 9 9
7 | 0 1 1 3 3 4 5 5 5 7 8
8 | 1 2 3 6 9
9 | 3 5 7 8

dit is een zogenoemd **stam-blad diagram** (Eng: *stem and leaf*)
4 | 5 6 8 staat voor de uitslagen: 45, 46 en 48
let op
4 | 5 betekent niet 4,5
4, | 5 betekent wel 4,5

a Noem een voordeel van dit stam-blad-diagram.
b Bepaal het gemiddelde, de mediaan en de modus

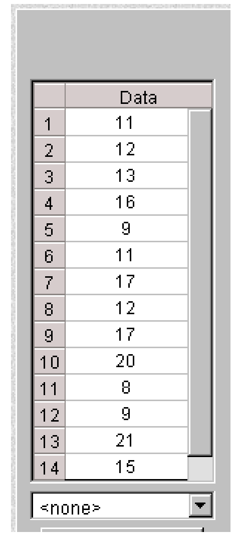
Opgave 3.5

Boxplot

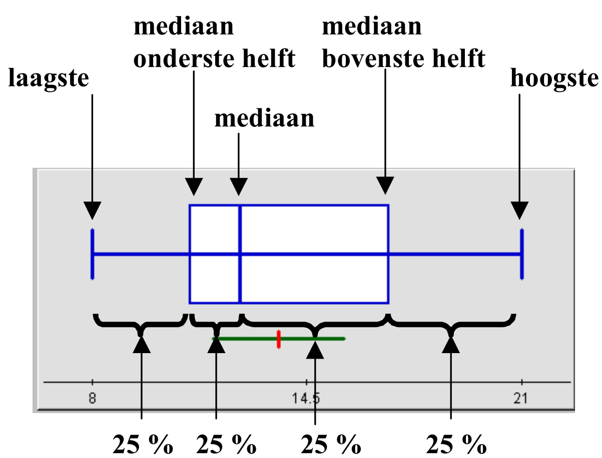
Een **boxplot** is een eenvoudige manier om de verdeling van data (waarnemingen, meetwaarden) weer te geven. Een voorbeeld (zie tabel rechts):

- sorteer de 14 gegevens van laag naar hoog
  8, 9, 9, 11, 11, 12, 12, 13, 15, 16, 17, 17, 20, 21
- bepaal de mediaan; in dit geval 12,5
- bepaal de mediaan van de onderste helft: 11
- bepaal de mediaan van de bovenste helft 17
- maak met deze waarden een tekening zoals in het voorbeeld
  gemaakt met:
  http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_200_g_3_t_5.html

3.1



	Data
1	11
2	12
3	13
4	16
5	9
6	11
7	17
8	12
9	17
10	20
11	8
12	9
13	21
14	15



De mediaan van de onderste helft wordt ook wel het **eerste** (of onderste) **kwartiel** K_1 genoemd. De mediaan van de bovenste helft is dan het **derde** (bovenste) **kwartiel** K_3.

a Maak nu zelf een boxplot (met de hand of met de applicatie op de website) van de examenscores uit de vorige opgave.

b Is hier sprake van een scheve verdeling?

Zoals we later zullen zien kun je een boxplot ook gebruiken om uitschieters te bepalen.

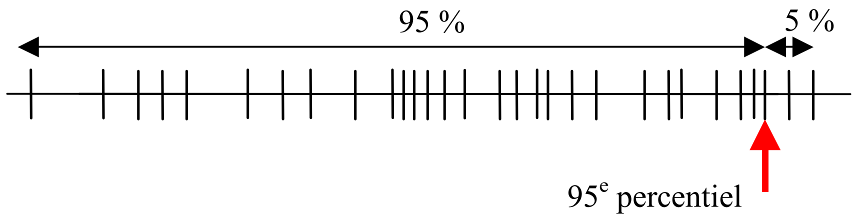
Opgave 3.6

percentielen

04

Percentielen

Kwartielen gaan over 25% van de metingen. Je kunt ook gebruik maken van **percentielen.** Hiermee wordt een bepaald percentage bedoeld. Het 95e percentiel is het getal waaronder 95 % van de meetwaarden liggen, zie figuur.



a Bepaal het 60e percentiel van de meetwaarden uit opgave 3.4.

Het eerste kwartiel is ook het 25e percentiel.

b Hoe zou men het 50e en 75e percentiel dus ook kunnen noemen?

3.3

R8 Goed of fout:
- links en rechts van het gemiddelde liggen evenveel meetwaarden
- een set waarnemingen kan meer dan één modus bevatten

R9 Welke waarde wordt het meest beïnvloed door één uitschieter (= sterk afwijkende waarde in een set waarnemingen): gemiddelde / mediaan /modus / frequentie? Leg uit.

R10 Een smal kwartiel in een boxplot komt overeen met een hoog / laag blok in een histogram.

R11 Geef in de boxplot aan waar (ongeveer) het gemiddelde ligt

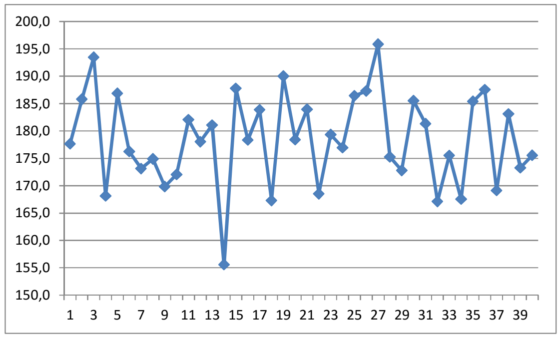
Histogram

Je kunt verzamelde meetwaarden ook in een grafiek uitzetten. We gebruiken de uitslag van een steekproef van de lengte van 40 volwassen mannen.

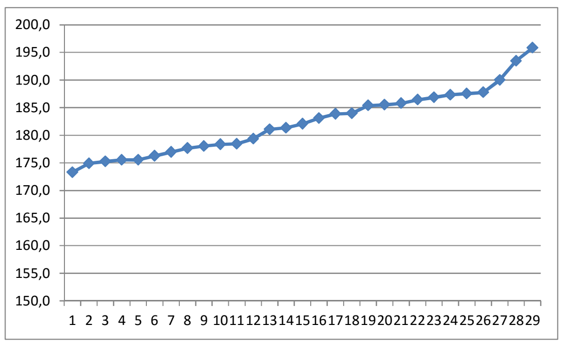
Steekproef Lengte van volwassen mannen (cm)							
177,7	176,2	182,0	178,3	184,0	187,3	181,3	187,5
185,8	173,1	178,0	183,9	168,5	195,8	167,1	169,1
193,5	174,9	181,1	167,3	179,3	175,2	175,5	183,1
168,1	169,8	155,6	190,0	177,0	172,8	167,5	173,3
186,8	172,1	187,7	178,4	186,4	185,5	185,4	175,5

lijndiagram

Als we al deze waarden in een **lijndiagram** uitzetten krijgen we het volgende plaatje.

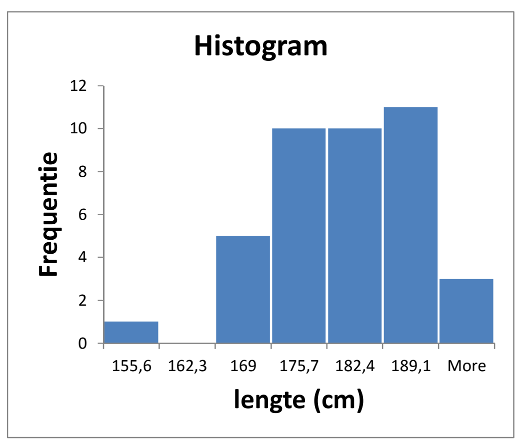


Dat geeft zeer weinig informatie. Eerst sorteren van laag naar hoog lijkt al iets beter.

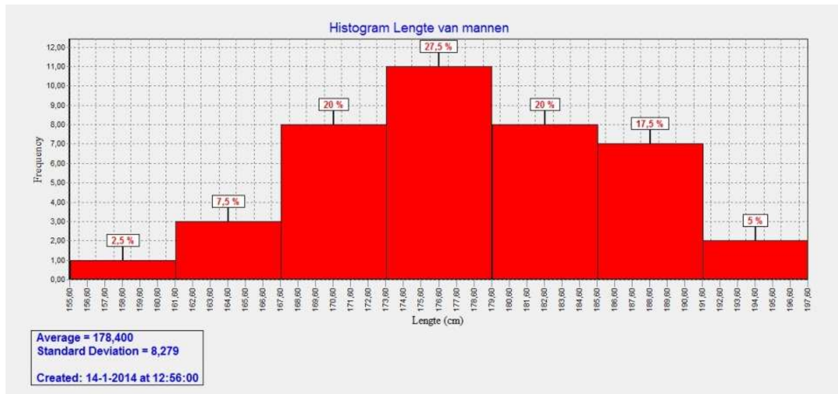


Als we vervolgens de meetwaarden in klassen indelen, krijgen we een speciaal staafdiagram, dat we een histogram noemen.

De staven worden nu klassen genoemd en bevatten ieder een aantal meetwaarden. Horizontaal staat de lengte uit en verticaal het aantal meetwaarden dat in iedere klasse aanwezig is.



Bovenstaande grafieken komen uit Excel. Een duidelijker histogram kan gemaakt worden met het programma *Histogram,* waar je de klassenindeling beter kunt aanpassen.



Opgave 3.7

Histogram

Bovenstaand histogram loopt van 155,6 cm tot 179,6 cm.
De klassenbreedte is de breedte van 1 kolom uitgedrukt (in dit geval) in cm.

a Hoeveel klassen zijn er gebruikt?

b Hoe groot is dus hier de klassenbreedte?

Aantal klassen en klassenbreedte

Hoe moet je een histogram indelen? Daar zijn eigenlijk geen vaste regels voor. Een histogram moet nuttige informatie leveren en gezond verstand is hier belangrijk bij. Als je zelf te weinig gezond verstand hebt of het niet vertrouwt, kun je de volgende regel voor het aantal klassen gebruiken.

aantal klassen histogram

aantal klassen histogram $= \sqrt{n}$ (afronden naar boven)

Meestal heeft het niet veel zin om meer dan 12 klassen te gebruiken.

Steekproef Lengte van volwassen mannen (cm)							
177,7	176,2	182,0	178,3	184,0	187,3	181,3	187,5
185,8	173,1	178,0	183,9	168,5	195,8	167,1	169,1
193,5	174,9	181,1	167,3	179,3	175,2	175,5	183,1
168,1	169,8	155,6	190,0	177,0	172,8	167,5	173,3
186,8	172,1	187,7	178,4	186,4	185,5	185,4	175,5

c Hoeveel klassen worden dat volgens die regel bij de lengte steekproef?

d Klopt dat met het histogram hierboven?

Als je het aantal klassen weet kun je ook de klassenbreedte uitrekenen.

klassenbreedte

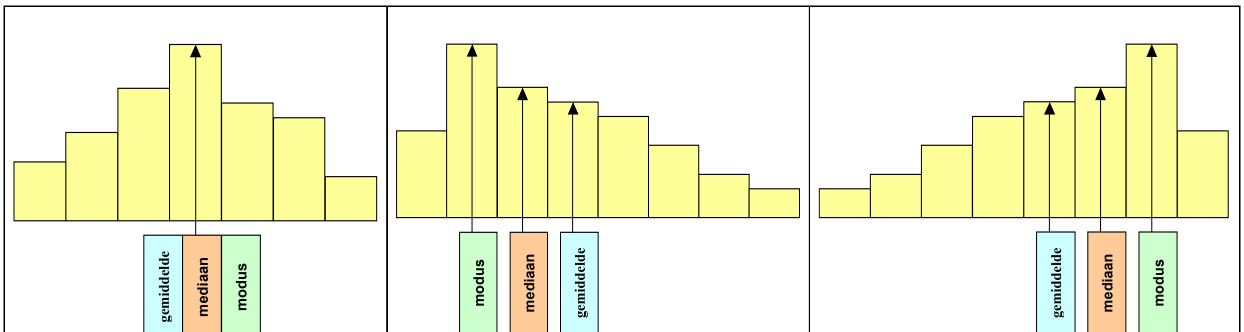
$$\text{klassenbreedte histogram} = \frac{\text{spreidingsbreedte}}{\text{aantal klassen}} = \frac{w}{\text{aantal klassen}}$$

e Bereken de klassenbreedte en rond verstandig af.

stappenplan histogram

1 Bepaal het aantal klassen.
2 Bereken de klassenbreedte en rond verstandig af.
2 Bepaal de klassengrenzen.
3 Tel hoeveel meetwaarden in elke klasse vallen, dit noemt men de frequentietabel,
4 Teken het histogram.

Er kan ook sprake zijn van een scheve verdeling van meetwaarden, bekijk de volgende drie histogrammen.

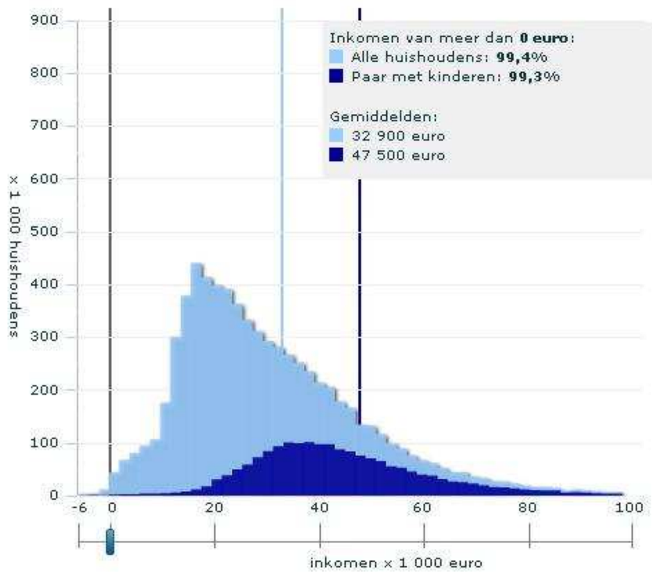


symmetrische verdeling	rechts-scheef verdeeld	links-scheef verdeeld
symmetrical distribution	*positively skewed distribution*	*negatively skewed distribution*

f Is er sprake van een scheve verdeling bij de lengtemetingen?

3.4

R12 Het inkomen in Nederland is niet symmetrisch verdeeld, dat zie je in het volgende histogram:



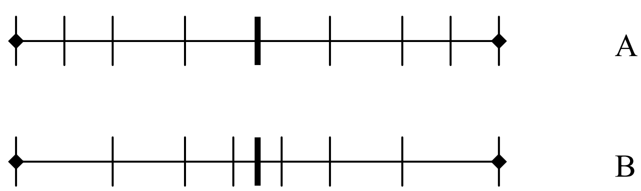
Wat voor soort verdeling is het wel?
Maak een schatting van het modale inkomen.

Opgave 3.8 **Spreidingsmaat**

Twee sets waarnemingen kunnen hetzelfde gemiddelde hebben en dezelfde spreidingsbreedte en toch niet gelijkwaardig zijn. Een voorbeeld.

A	36	22	40	27	20	33	38	30	24
B	33	20	24	31	30	40	27	36	29

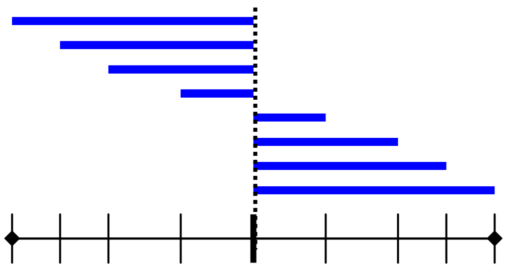
Op getallenlijnen ziet dat er zo uit. Het gemiddelde en de mediaan zijn allebei 30. De spreiding is in beide gevallen 10.



Als je hier het systeem gemiddelde ± spreiding hanteert, komt er bij beide meetseries hetzelfde uit. Toch is er verschil!

a Bij welke van de twee reeksen is de nauwkeurigheid groter en waarom?

In onderstaande figuur zijn de afwijkingen van de meetwaarden van meting A t.o.v. het gemiddelde getekend.



b Waarom heeft het geen zin om de gemiddelde afwijking t.o.v. het gemiddelde te berekenen? Wat komt daar namelijk uit?

we leren meteen wat veelgebruikte symbolen
Σ = sigma (optelsom)

Om toch een gemiddelde afwijking te kunnen berekenen doen we het volgende:

- zet alle metingen (aantal = n) in een tabel (dit hoeft niet in een bepaalde volgorde)
- de metingen worden genummerd van 1 tot 9, een meting heet dan x_i (i is het tellertje dat loopt van 1 tot n) dus $x_1 = 36$ en $x_2 = 22$, enzovoort
- bereken het gemiddelde $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{36+22+40+27+20+33+38+30+24}{9} = 30$$

- bereken het verschil tussen x_i en het gemiddelde $\bar{x}$, dus $x_i - \bar{x}$
- zet dit in het kwadraat: $(x_i - \bar{x})^2$
- tel al deze waarden op $\Sigma(x_i - \bar{x})^2$. Het resultaat zie je in onderstaande tabel.

Berekening gemiddelde afwijking meting A				
nummer	**meting**	**gemiddelde**	**verschil**	**verschil^2**
i	x_i	$\bar{x}$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	36	30	6	36
2	22	30	-8	64
3	40	30	10	100
4	27	30	-3	9
5	20	30	-10	100
6	33	30	3	9
7	38	30	8	64
8	30	30	0	0
9	24	30	-6	36
$n = 9$		$\bar{x} = 30$	$\Sigma (x_i - \bar{x}) = 0$	$\Sigma(x_i - \bar{x})^2 = 418$

- bereken het gemiddelde van de kwadraten:
$$\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{418}{8} = 52{,}25$$

bij een steekproef delen we niet door *n* maar door *n*-1

Het getal dat we nu gevonden hebben wordt **variantie** genoemd.

$$\text{variantie} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

- neem nu hier de wortel uit:
$$\sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{52{,}25} = 7{,}23$$

06

- dit getal is een maat voor de gemiddelde afwijking van de waarnemingen t.o.v. het gemiddelde en heet de **standaarddeviatie** of **standaardafwijking** (het symbool σ heet ook **sigma**), het is een goede maat voor de precisie van de meting.

De standaarddeviatie is, net zoals de eerder gebruikte spreiding, een absolute onnauwkeurigheid en dus een maat voor de precisie Als we ook de relatieve onnauwkeurigheid willen weten, rekenen we de **variatiecoëfficiënt** uit:

$$\text{variatiecoëfficiënt} = \frac{\sigma_{n-1}}{\bar{x}} \cdot 100\ \%$$

c Bereken de variatiecoëfficiënt van meting A.
Waarom geeft deze waarde een goed beeld van de precisie van de meting?

d Maak eenzelfde tabel voor meting B en bereken de standaarddeviatie en variatiecoëfficiënt van deze meetserie.

e Vergelijk de precisie van meting A en meting B.

Samenvattend, bij een steekproef geldt dus:

variantie van een steekproef

$$\boxed{\text{variantie} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

standaarddeviatie van een steekproef

$$\boxed{\sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}}$$

variatiecoëfficiënt van een steekproef

$$\text{variatiecoëfficiënt } = \frac{\sigma_{n-1}}{\overline{x}} \cdot 100\ \%$$

Het **gemiddelde van een populatie** wordt weergegeven met het symbool μ. Als we een hele populatie gemeten hebben geldt:

variantie van een populatie

$$\text{variantie } = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n}$$

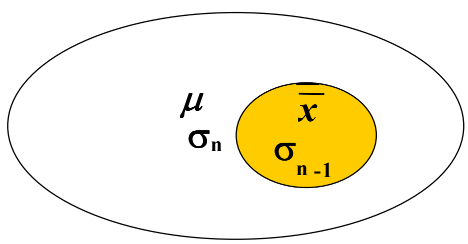
standaarddeviatie van een populatie

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \mu)^2}{n}}$$

variatiecoëfficiënt van een populatie

$$\text{variatiecoëfficiënt } = \frac{\sigma_n}{\mu} \cdot 100\ \%$$

In een plaatje zie je de relatie tussen populatie en steekproef.



3.5

R14 Max denkt dat je de standaarddeviatie kunt uitrekenen door gewoon de formule in te vullen. Leg uit waarom dat niet kan.

R15 Wat is het verschil in uitkomst doordat je bij een populatie door n deelt en bij een steekproef door (n-1)?

R16 Wat zou de reden hiervan zijn?

R17 Wat moet je precies doen als je de volgende formule ziet?

$$\sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n-1}}$$

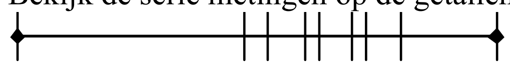
R18 Leg uit waarom er weinig verschil zal zijn tussen een steekproef en de hele populatie als n groot is, bijvoorbeeld 50. Laat dit zien met een getallenvoorbeeld.

R19 Goed of fout: als de standaarddeviatie groot is, dan zijn de meetwaarden minder gespreid.

R20 De som van de afwijkingen van alle meetwaarden t.o.v. het gemiddelde is: positief /negatief nul.

R21 Soms zegt de standaarddeviatie meer dan het gemiddelde. In twee ziekenhuizen is de gemiddelde wachttijd bij een afspraak 30 minuten. Bij ziekenhuis 1 is de standaarddeviatie nul minuten en bij ziekenhuis 2 is die 15 minuten. Welk ziekenhuis heeft jouw voorkeur en waarom?

R22 Bekijk de serie metingen op de getallenlijn.



Wat is hier waarschijnlijk aan de hand? Zegt de term uitschieter je iets? Mag je zo maar doorgaan om gemiddelde en standaarddeviatie te bepalen?

R23 Is het gemiddelde $\bar{x}$ van de steekproef ook een schatting voor het gemiddelde μ van de hele populatie? Leg uit. Hoe kun je hier meer zekerheid over krijgen?

Opgave 3.9 **Bloedonderzoek**

Bij 21 wielrenners is (als steekproef voor het hele peloton) de hematocrietwaarde in het bloed bepaald (L/L):

0,3 | 6 8 8 9 9
0,4 | 0 1 1 2 3 4 4 5 5 6 6 7 7 9
0,5 | 0 5

Bereken het gemiddelde, de standaarddeviatie en de variatiecoëfficiënt . Dat kun je met een tabel doen, maar het is handiger om hier je ZRM te gebruiken.

3.6

Gebruiksaanwijzing kwijt?
http://www.casio-europe.com/nl/support/manuals/edu/

Opgave 3.10 **Kleine meetseries**

Je hebt een meting in duplo gedaan: 3,56 g/L en 3,12 g/L.

a Wat zou je als uitslag doorgegeven hebben voordat je geleerd had over standaarddeviatie?

b Bereken de standaarddeviatie. Conclusie?

c Wat geef je nu als uitslag door?

Omdat je die afwijking veel te groot vindt, doe je nog een extra meting: met als uitslag 3,30 g/L.

d Bereken weer de spreiding en de standaarddeviatie. Conclusie?

Opgave 3.11 **Herhaalbaarheid**

Wanneer je een meting in duplo, triplo of nog meer doet, herhaal je de meting. Als de metingen door één persoon op hetzelfde apparaat zijn uitgevoerd wordt de standaarddeviatie van de uitslagen ook wel **herhaalbaarheid** (Eng: repeatability) genoemd. Het getal is dan een maat voor de precisie van de combinatie van meetmethode en student. Vaak wordt hij uitgedrukt in procenten en is dan gewoon de variatiecoëfficiënt.

Een enthousiaste eerstejaarsstudent heeft op practicumzaal 1 door middel van titratie met HCl de concentratie NaOH in een monster bepaald. De resultaten waren:

Stellen concentratie NaOH (mol·L^{-1}) door 1 analist				
0,1013	0,1005	0,1011	0,1000	0,1000
0.0989	0,1008	0,0968	0,1017	

a Bereken de herhaalbaarheid van deze methode in mol·L^{-1}. Gebruik de ZRM !!

b Bereken de herhaalbaarheid ook in %.

c Lijkt je dit acceptabel?

Opgave 3.12 **Reproduceerbaarheid**

Als de metingen door verschillende personen op verschillende tijdstippen op hetzelfde apparaat zijn uitgevoerd wordt de standaarddeviatie van de uitslagen ook wel **reproduceerbaarheid** (Eng: reproducibility) genoemd. Het getal is dan een maat voor de verschillen tussen de analisten. Ook deze wordt meestal uitgedrukt in procenten: de variatiecoëfficiënt.

De andere analisten van labzaal 1 (vorige opgave) willen niet achterblijven en ze analyseren hetzelfde monster als de eerste analist. De resultaten van alle 6 analisten waren (ieder het gemiddelde van drie titraties):

Stellen concentratie NaOH (mol·L^{-1}) door 6 analisten					
0,1101	0,1201	0,1142	0,0929	0,1098	0,1011

a Bereken de reproduceerbaarheid van deze methode in (mol·L^{-1}). Gebruik de ZRM !!

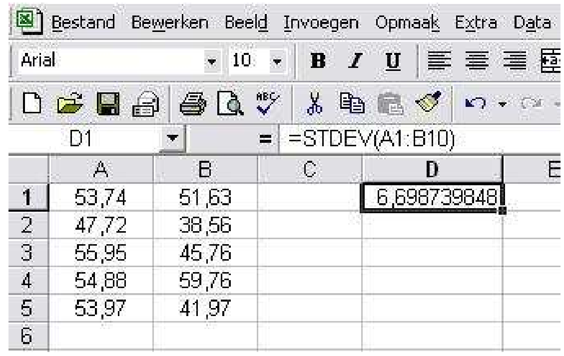
b Bereken de reproduceerbaarheid ook in %.

c Vergelijk de uitslag met die van de herhaalbaarheid van de eerste analist. Is het verschil te verklaren?

d Bespreek samen of dit acceptabel zou zijn.

Opgave 3.13 **Gebruik van Excel**

Bij http://www.micquality.com/introductory_statistics/int16.htm kun je een zoutmonster analyseren. Ook staat uitgelegd hoe je de standaarddeviatie met Excel kunt berekenen.



a Oefen dit door linksonder op de spreadsheet te klikken.

b Neem zelf 10 samples en bepaal met Excel hiervan het gemiddelde en de standaarddeviatie.

08

Met Excel kun je tegelijkertijd een aantal meetwaarden verwerken en daar kengetallen zoals gemiddelde en de standaarddeviatie uit halen. Dit heet *Beschrijvende Statistiek*.
Voor het gebruik hiervan zie de Excel-tool 08.

3.1

S1 Wat is het verschil tussen een steekproef en een populatie? Geef dit weer in een tekening. Geef een voorbeeld.

S2 Wat betekenen de termen aselect en representatief?

S3 Wat wordt bedoeld met centrummaten? Beschrijf ze aan de hand van een voorbeeld. Welke gebruiken we?In welke gevallen zijn ze nuttig?

S4 Wat wordt bedoeld met een "skewed distribution"? Welk nut hebben ze?

S5 Leg m.b.v. een voorbeeld uit hoe je een stam-blad diagram gebruikt.

S6 Hoe maak je een boxplot? Welk nut heeft die? Wat is een kwartiel?

S7 Wat zijn percentielen? Geef een voorbeeld.

S8 Wat is een histogram? Wat is het nut ervan?

S9 Hoe bepaal je het aantal klassen en de klassenbreedte van een histogram?

S10 Maak een stappenplan voor het zelf tekenen van een histogram.

S11 Hoe maak je een histogram met SPSS, Excel of Histogram?

S12 Wat is een spreidingsmaat? Welke gebruiken we meestal?

S13 Leg in woorden uit wat de standaarddeviatie precies is.

S14 Wat betekent $\sigma_n = \sqrt{\dfrac{\sum (x_i - \mu)^2}{n}}$?
Leg met een voorbeeld uit hoe je dat uitrekent.
Wat is hier het verschil tussen steekproef en populatie?

S15 Wat is het verschil en de overeenkomst tussen $\bar{x}$ en μ?

S16 Hoe reken je de variatiecoëfficiënt uit? Wat voor nut heeft die? Geef een voorbeeld.

S17 Wat is het verschil tussen de variantie, de standaarddeviatie en de variatiecoëfficiënt? Welke betekenis hebben ze?

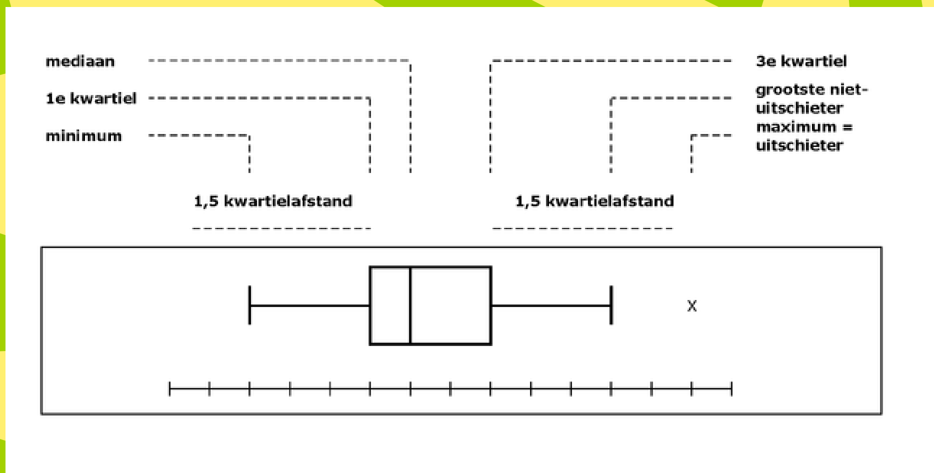
S18 Hoe bepaal je de herhaalbaarheid en de reproduceerbaarheid van een meetmethode en wat is de betekenis ervan?

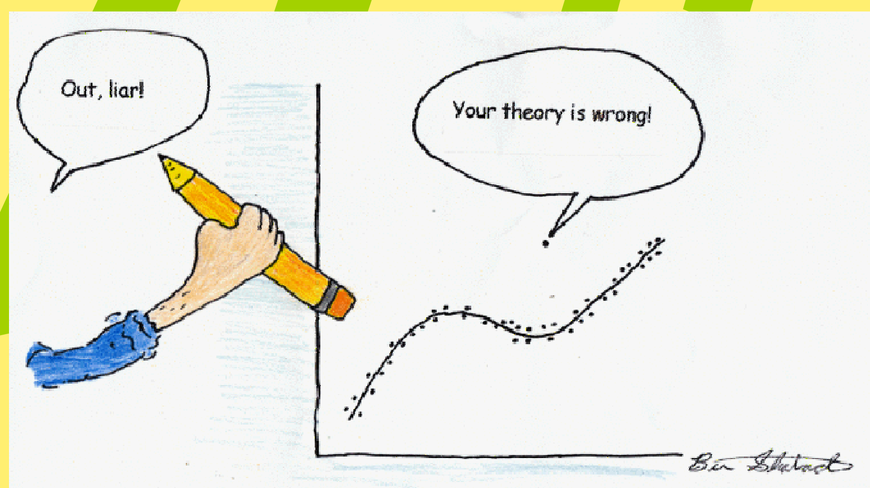
S19 Wat klopt hier niet?
Een anekdote: in een Amerikaans luxe hotel vroeg een gast aan de piccolo hoeveel een fooi gemiddeld was. De piccolo moest even nadenken en zei toen 50 dollar. De gast vond het wel veel, maar omdat hij multimiljonair was gaf hij de piccolo 50 dollar. Deze bedankte hem uitgebreid en zei dat hij de eerste was die het gemiddelde haalde.

S20 Nog een:
80 % van de Nederlandse autorijders vinden dat zij beter dan gemiddeld rijden.

S21 Zou het wel kunnen kloppen als de verdeling scheef is?

4 Uitschieters bepalen en afronden





uitschieter?
vreemde statistiek?
warhoofd?

Opgave 4.1

Uitschieters: de Dixons-test of Q-test

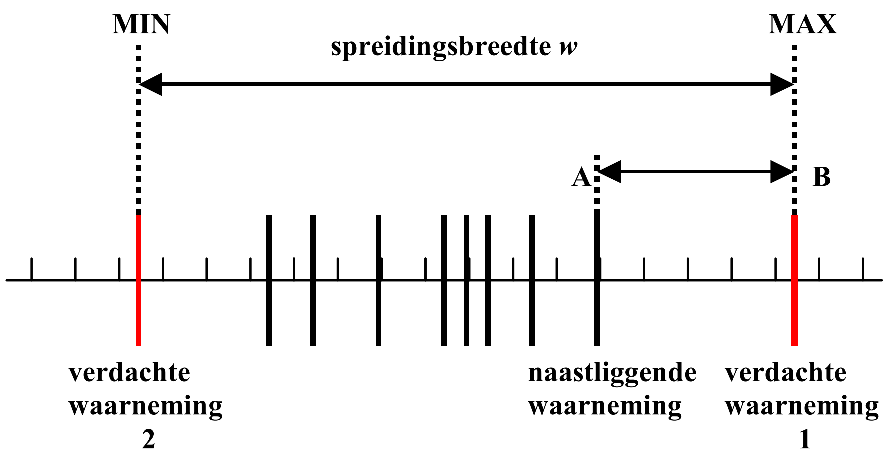
Van afvalwater is 10 maal het loodgehalte bepaald:

Loodgehalte in afvalwater (mg/L)				
2,4	2,1	2,3	1,7	2,2
2,5	2,4	3,7	2,4	2,3

a Zijn hier mogelijk **uitschieters** aanwezig, denk je?

b Zet de waarden op een getallenlijn.. Helpt dit om een uitschieter aan te wijzen?

Ons gevoel kan ons bedriegen bij statistiek, daarom zijn er regels afgesproken.
Een uitschieter is een minimum of maximum meetwaarde die opvallend ver van de naastliggende af ligt, zie tekening



De Dixons-test maakt het mogelijk om een enkele uitschieter op te sporen. Als er uitschieters in groepjes voorkomen moeten we een boxplot inzetten.
Bij de Dixons-test kijkje naar de verhouding tussen twee lijnstukken: AB en de spreidingsbreedte *w*.
De meest verdachte waarneming is 3,7

c Bereken de lengte van AB, dus:
AB = verdachte waarneming 1 – naastliggende waarneming

d Bereken *w*.

e Bereken:

testwaarde Dixons-test of Q-test

$$Q_{\text{test}} = \frac{|\text{verdachte waarneming} - \text{naastliggende waarneming}|}{w}$$

de rechte strepen in |A-B| betekenen dat de uitkomst altijd positief wordt

f Zoek de grenswaarde op in de tabel

Grenswaarden voor het bepalen van één enkele uitschieter (Dixons-test of Q-test)									
n	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Q_{grens}	0,94	0,76	0,64	0,56	0,51	0,47	0,44	0,41	0,39
n	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Q_{grens}	0,37	0,35	0,34	0,33	0,32	0,31	0,30	0,29	0,28
n	21	22	23	24	25	30	35	40	45
Q_{grens}	0,29	0,29	0,28	0,28	0,28	0,26	0,25	0,24	0,23

g Bepaal of $Q_{test} > Q_{grens}$. Zo ja, dan is er sprake van een uitschieter.

h Als 3,7 een uitschieter is, kan 1,7 ook nog een uitschieter zijn. Controleer dit op dezelfde manier. Je moet dan eerst wel uitslag 3,7 weggooien!

Opgave 4.2

Nitraatgehalte

Onderzoek of er uitschieters zitten in de volgende meetserie:

Gehalte nitraat in een monster spinazie ($g\ NO_3^-/kg$)				
1,6	1,7	1,6	1,9	1,5
2,5	1,5	1,4	1,6	1,1

Opgave 4.3

Waar ligt de eerste uitschieter (oplossen van een vergelijking)?

Je hebt een meting in duplo gedaan: 23,5 en 24,2. Om uit te rekenen waar de uitslag van een derde meting x_3 moet liggen om een uitschieter te zijn, moet je de volgende wiskundige formule oplossen:

$$\frac{x-24{,}2}{x-23{,}5}=0{,}94$$

a Laat met een getallenlijn zien dat die formule klopt.

b Bereken waar de eerstvolgende uitschieter ligt (*grootheid isoleren* of *vergelijking oplossen* in je Toolboek).

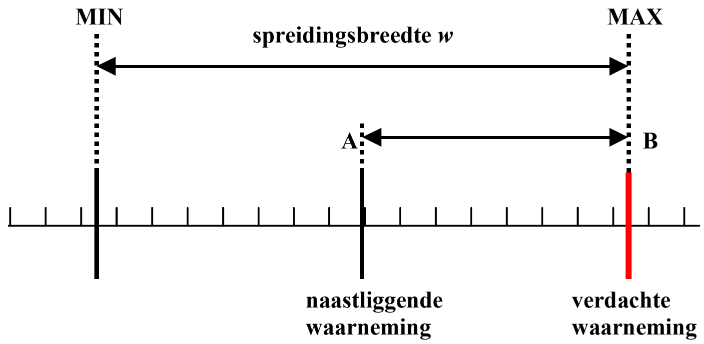
c Had je dat verwacht?

4.1

R1 Waarom kun je bij een meting in triplo niet op je gevoel een uitschieter aanwijzen?

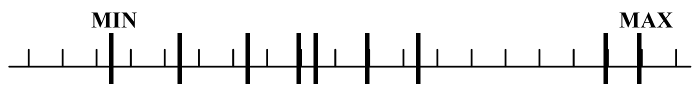
R2 In de tekening hieronder zijn maar 3 van de ?? waarnemingen getekend. Daardoor is niet zonder meer te zeggen of er sprake is van een uitschieter.

Waar hangt dat van af?



R3 Bij hoeveel waarnemingen is het punt wel een uitschieter?

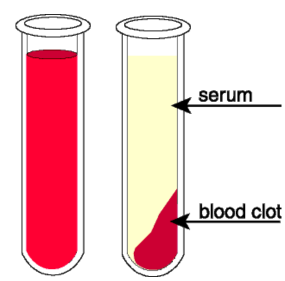
R4 De Dixons-test is alleen geschikt om een losse uitschieter te bepalen. Leg met behulp van de tekening hieronder uit waarom dat zo is.



R5 Zijn er volgens jou wel mogelijke uitschieters?

Opgave 4.4 **Uitschieters: de boxplot**

De Dixons-test werkt alleen bij een losse, enkele uitschieter. Bij twee mogelijke uitschieters dicht bij elkaar en bij grote aantallen data met mogelijk groepen uitschieters moeten we de aangepaste boxplot gebruiken. Als voorbeeld 150 meetwaarden waarin door een groep studenten het gehalte eiwit in hetzelfde monster bloedserum is bepaald. Zie het stam-blad-diagram (volgende pagina).



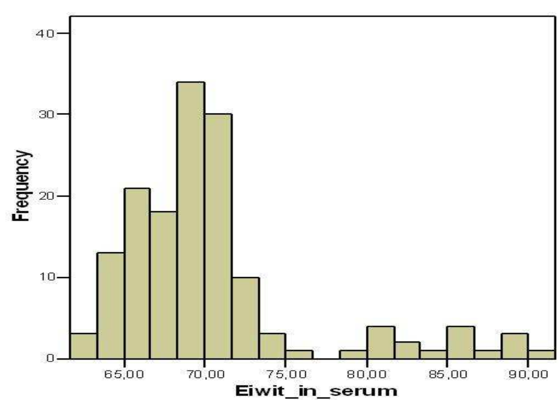
Eiwit in serum

frequentie		
2	62,	47
5	63,	35678
9	64,	234567799
16	65,	1122233466788899
7	66,	0122379
14	67,	00003333567789
8	68,	01567999
27	69,	011112334444455555566677899
22	70,	0112233444557778899999
14	71,	00122225677888
5	72,	24557
0	73,	
3	74,	223
1	75,	3
0	76,	
0	77,	
0	78,	
1	79,	0
2	80,	78
3	81,	245
0	82,	
1	83,	3
0	84,	
3	85,	027
2	86,	45
0	87,	
3	88,	057
1	89,	8
0	90,	
1	91,	5

a Welke waarden zijn volgens jou uitschieters? Hoeveel zijn er dat?

Bekijk het histogram van deze metingen (figuur rechts gemaakt met SPSS).

b Wordt het antwoord op vraag **a** bevestigd?



Met behulp van een **boxplot voor uitschieters** kun je dit bewijzen.

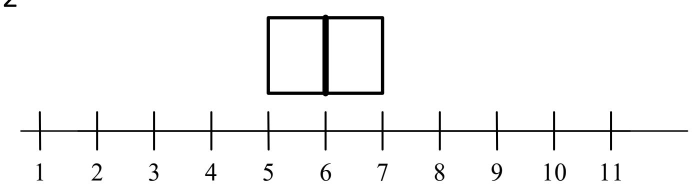
Stappenplan uitschieters bepalen met de boxplot

1 Bepaal max, min, mediaan, eerste kwartiel $\boldsymbol{K_1}$ en derde kwartiel $\boldsymbol{K_3}$ van de waarnemingen.
2 Teken boven de getallenlijn de box die bestaat uit mediaan, eerste kwartiel K_1 en derde kwartiel K_3
3 Bereken de **interkwartielafstand**: $\boldsymbol{IKA = K_3 - K_1}$
(Engels: IQR = inter quartile range)
4 Waarden die meer dan 1½ IKA van de box liggen zijn uitschieters.
5 Zet een streepje waar de eerste bovenste en onderste waarden liggen die geen uitschieters zijn.
6 Verbind deze door een streep met de box.

Voorbeeld:

1 Meetwaarden 1, 4, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 11
Mediaan = 6
eerste kwartiel $K_1 = 5$
derde kwartiel $K_3 = 7$

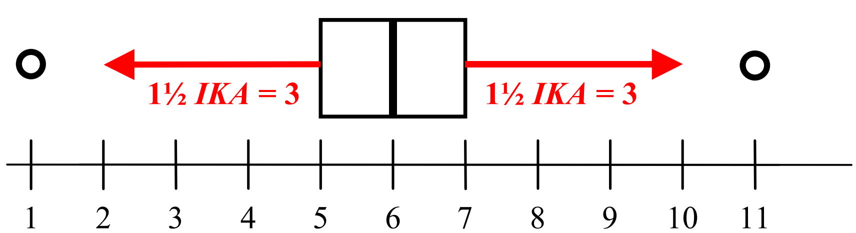
2



3 $IKA = K_3 - K_1 = 7 - 5 = 2$

4 $1\frac{1}{2}\ IKA = 1\frac{1}{2} \times 2 = 3$

5



Blijkbaar zijn 1 en 11 uitschieters in deze meetserie

c Controleer nu met een boxplot welke uitslagen van de analyse van eiwit in serum uitschieters zijn.

Opgave 4.5

Uitschieters: gebruik van SPSS

Het programma SPSS is gemaakt voor statistische bewerking en analyse van gegevens. Je kunt er bijvoorbeeld een boxplot met uitschieters mee maken. Zie Bijlage **5**.

SPSS 16

Er zijn 20 bepalingen gedaan aan hetzelfde monster haring.

Gehalte kwik in haring (mg/kg vers gewicht)			
0,45	0,48	0,46	0,41
0,48	0,60	0,43	0,30
0,38	0,37	0,48	0,45
0,36	0,36	0,39	0,43
0,44	0,44	0,40	0,42

In Richtlijn 2001/22/EG van de Europese Unie is het maximale gehalte kwik in vis vastgelegd: 0,5 mg/kg vers gewicht.

Voer een onderzoek uit op uitschieters (gebruik SPSS of maak de boxplot met de hand).

Opgave 4.6

Afrondingsregels

Na het bepalen van uitschieters kunnen de waarnemingen verder verwerkt worden. Bij de uiteindelijke presentatie van de resultaten zal er afgerond moeten worden. Bekijk de tabel, de berekende waarden zijn afgerond volgens de significantieregels.

Massa (g)	
1	5,235
2	5,228
3	5,247
gemiddeld	5,23666666667

a Hoe zou je het gemiddelde afronden, rekening houdend met significantie?

De officiële afrondingsregels zijn:

stappenplan afronding

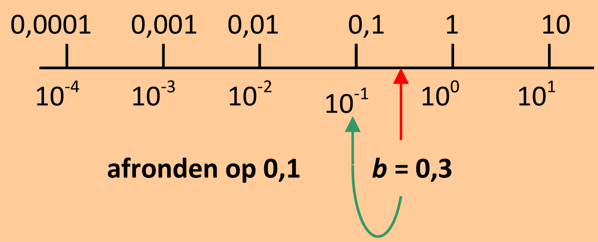
Afronden gebeurt altijd op decimalen dus op machten van 10. We moeten uitzoeken welke macht van 10 dat is.

1 Bepaal de **bovengrens *b* van het afrondingsinterval**, dat kan op twee manieren:

- σ_n of σ_{n-1} is bekend: $b = \frac{1}{2}\sigma$
- σ is niet bekend: $b = \frac{w}{2\sqrt{n}}$ (met w = spreidingsbreedte)

2 Vervolgens wordt op de eerstvolgende onderliggende macht van 10 afgerond:

3



4 Rond nu het gemiddelde af en vervolgens de standaarddeviatie naar boven af op evenveel decimalen.

Voorbeelden:

$\bar{x}$	σ	*b*	afronden op	totale afronding
12,877	0,728	0,364	0,1	12,9 ± 0,8
5,257	0,144	0,072	0,01	5,26 ± 0,15
866,11	23,24	11,62	10	$(8{,}7 \pm 0{,}3)\cdot 10^2$

b Controleer of het derde voorbeeld klopt.

c Bepaal nu zelf hoe de afronding van de tabel met de gemeten massa's volgens de afrondingsregels moet plaatsvinden.

Opgave 4.7

Afronden oefenen

Bleekloog wordt gebruikt om zwembadwater te desinfecteren. Het chloorgehalte in bleekloog is bepaald.

Chloor in bleekloog (μg/L)	
1	149,845
2	149,967
3	150,034
4	149,783

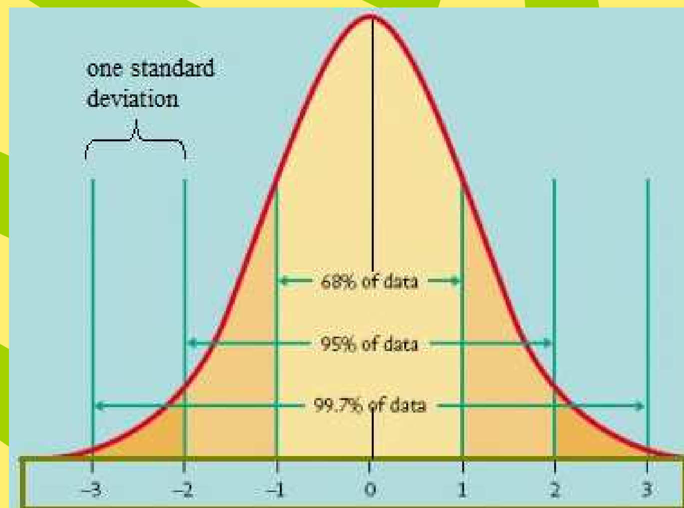
a Bepaal het gemiddelde en de standaarddeviatie (ZRM).
b Rond de waarden af.

Het is soms verstandig om bij een rapportage van de uitslagen ook de gegevens zelf af te ronden.
c Maak de juiste afronding.

4.1

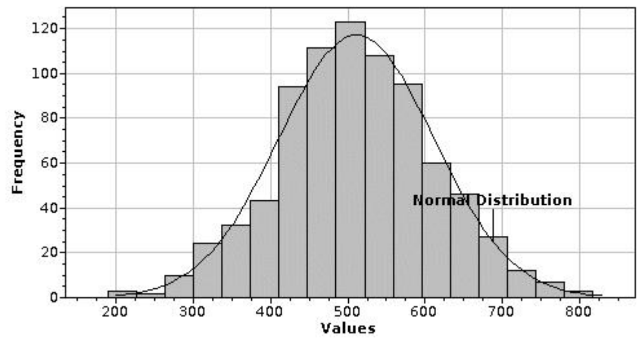
S1 Wat is een uitschieter? Hoe ontstaan ze? Waarom is het belangrijk om ze te herkennen?
S2 Welke 2 manieren zijn er om uitschieters te bepalen?
S3 Welke methode kies je een bepaald geval en waarom? Wat is dus de eerste stap als je uitschieters gaat bepalen?
S4 Hoe werken deze methodes en wanneer gebruik je ze? Maak stappenplannen.
S5 Waarom moet je vaak waarden afronden?
S6 Hoe bepaal je de bovengrens van het afrondingsinterval en wat betekenen deze termen? Geef een voorbeeld.

5 Normaalverdeling



http://www.youtube.com/watch?v=xDIyAOBa_yU

Normaalverdeling
Wanneer de variaties van een eigenschap in een populatie (of de fouten in een meetserie) volkomen toevallig tot stand komen dan zijn de uitslagen normaal verdeeld en spreken we van een **normaalverdeling**. Het histogram ziet er dan zo uit.



Hoe meer waarnemingen of metingen, des te meer lijkt het histogram op de ideale klokvormige grafiek (Engels: *bell-shaped curve of Gauss curve*).

Zeer veel grootheden zijn normaal verdeeld rond het gemiddelde. Voorbeelden:

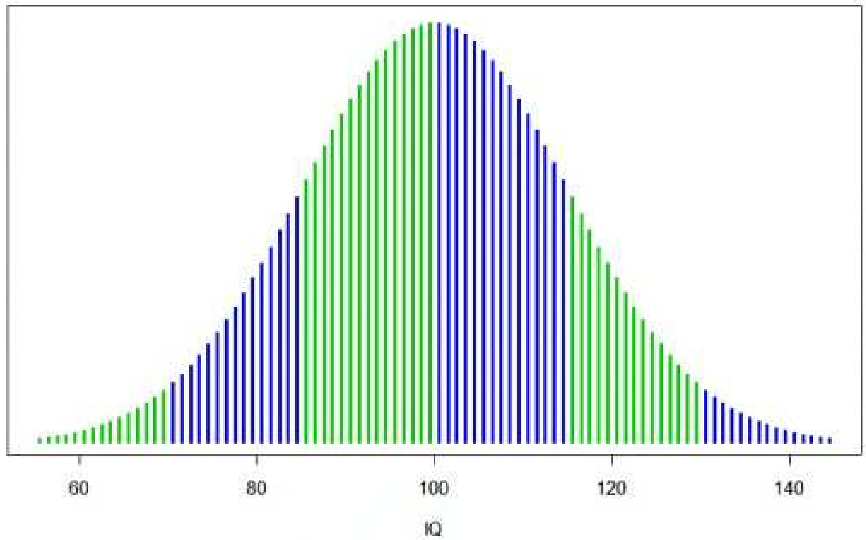
- De lengte en het gewicht van mensen en dieren is normaal verdeeld;
- Het gewicht van de kogels waarmee kogelstoters stoten is normaal verdeeld rond 7,257 kg.

- De diameter van de kogels is normaal verdeeld rond 129 mm.
- De herhaalde metingen van deze diameter zijn ook normaal verdeeld.
- De herhaalde metingen van het zoutgehalte in een monster zeewater zijn normaal verdeeld.
- Vrijwel alle uitslagen van chemische bepalingen van 1 monster zijn normaal verdeeld.
- Bij microbiologische analyses zijn de logwaarden van de uitslagen normaal verdeeld.

Opgave 5.1

IQ

In de figuur zie je het histogram van het intelligentiequotiënt (IQ) van een zeer grote populatie mensen.



a Hoe zie je dat dit een histogram is?

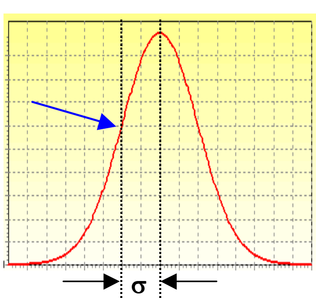
b Bepaal de klassenbreedte van dit histogram (tip: tellen).

c Hoe groot zijn: het gemiddelde, de mediaan en de modus?

d Hoe groot is het percentage mensen met een IQ boven de 100?

e Zouden er geen mensen zijn met een IQ boven 145? Of onder de 55?

Waar zit de standaarddeviatie in deze grafiek?



f Volg de grafiek vanaf links tot je bij het punt komt waar de grafiek niet steeds sneller maar langzamer gaat stijgen. Dit heet een **buigpunt**. Lees de bijbehorende IQ waarde af.

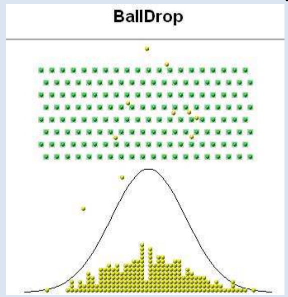
g Dit punt ligt precies 1 standaarddeviatie van het gemiddelde. Hoe groot is dus de standaarddeviatie van de IQ verdeling?

h Tussen 2 standaarddeviaties links en rechts van het gemiddelde liggen 95 % van alle data. Welke IQ waarden zijn dat?

5.1

Achtergrond Hoe ontstaat een normaalverdeling?

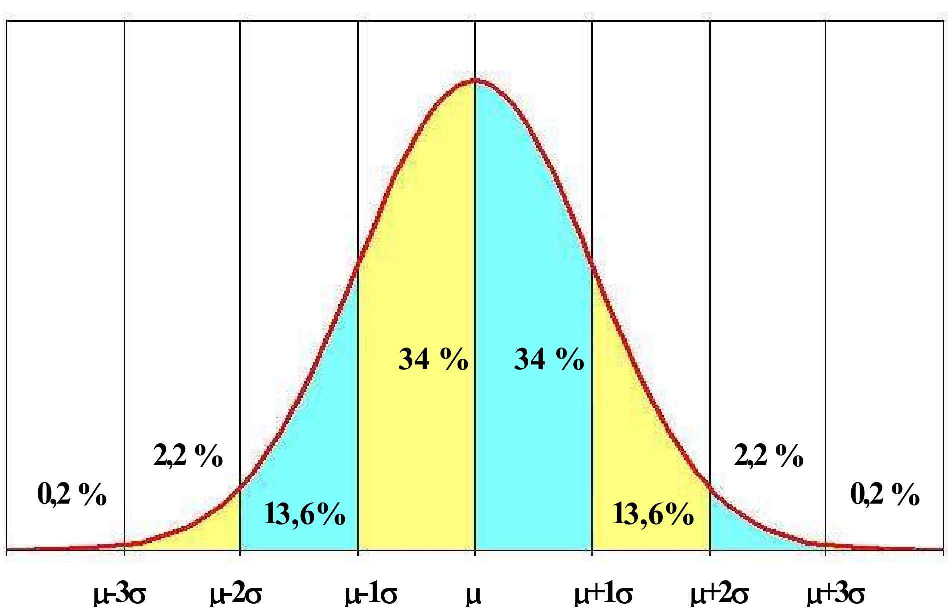
In de simulatie
http://cognitrn.psych.indiana.edu/busey/Q301/BallDrop2Dists/BallDrop.html
zie je hoe balletjes door toeval vanuit eenzelfde beginpositie op verschillende plekken terechtkomen. Als er maar genoeg balletjes vallen ontstaat uiteindelijk een normaalverdeling.
Als je de simulatie vaker bekijkt zie je dat hij nooit twee keer hetzelfde verloopt.



Waarom is de kans dat een balletje helemaal links of rechts terecht komt veel kleiner dan dat hij ergens in het midden komt?

Opgave 5.2 **Vuistregels normaalverdeling**

In onderstaande figuur zijn alle percentages aangegeven die bij een normaalverdeling horen bij de gebieden die 1, 2 of 3 standaarddeviaties van het gemiddelde liggen.



a Hoeveel % ligt tussen $\mu - 1\sigma$ en $\mu + 1\sigma$?

b Hoeveel % ligt tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$?
c Hoeveel % ligt tussen $\mu - 3\sigma$ en $\mu + 3\sigma$?
d Neem de figuur over en zet deze getallen er ook bij.

De getallen krijgen meer betekenis met een voorbeeld.
Het gemiddelde gewicht van de Nederlandse man is 82,4 kg. Van de mannen weegt 2,4 % minder dan 54,0 kg.

e Bereken de standaarddeviatie van het gewicht. Maak als hulpmiddel een schets van de normaalverdeling met getallen.
f Teken een normaalverdeling zoals in de figuur met alle juiste gewichten.
g Vul in: 2,4 % van alle Nederlandse mannen weegt meer dan ……. kg (tip: kijk goed in de figuur).
h Hoeveel % van de mannen heeft een gewicht tussen 96,6 kg en 110,8 kg?

Opgave 5.3

Significantie
De duur van zwangerschappen bij mensen is normaal verdeeld met een gemiddelde van 266 dagen en een standaarddeviatie van 10 dagen.

Bij een normaalverdeling gaat men ervan uit dat 5 % van het totaal *significant* (opmerkelijk, opvallend) afwijkt.

a Boven hoeveel dagen duurt een zwangerschap significant te lang?
b Hoeveel weken zouden gynaecologen dus waarschijnlijk de zwangerschap maximaal laten duren?

Zoals al eerder gezien is het IQ normaal verdeeld met een gemiddelde van 100 en een standaarddeviatie van 16.

c Boven en onder welke grenzen is het IQ dus significant te hoog of te laag?

5.1

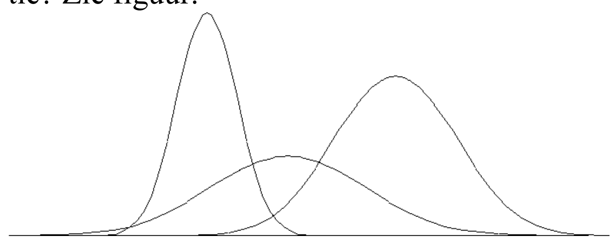
R1 Welke van de volgende zaken zouden volgens jou een normaalverdeling kunnen hebben? Leg uit waarom.

- de lengte van alle studenten op de laboratoriumschool
- het gewicht van alle vrouwelijke studenten
- de leeftijd van alle studenten
- de geboortedata van alle studenten
- het aantal uren dat studenten per week aan de studie besteden
- de tijdsduur van mobiele telefoongesprekken van stu-

denten

- het aantal uren dat studenten TV kijken

R2 Welke normaalverdeling heeft de kleinste standaarddeviatie? Zie figuur.



Opgave 5.4

Kansrekening

Als de normaalverdeling van een populatie bekend is zegt die ook iets over de **kans** om bij een steekproef een bepaald resultaat te halen. Wat zijn kansen eigenlijk?

Je gooit met een munt. Kop of munt hebben evenveel kans om boven te komen liggen, tenminste als de munt zuiver is) Er zijn twee mogelijkheden (Eng: possibility). De kans dat je een 1 gooit is dus $\frac{1}{2}$ ofwel 0,5. Voor het gemak schrijven we ook wel 50 %.

Je gooit met een dobbelsteen. Een normale dobbelsteen heeft 6 cijfers die allemaal een gelijke kans hebben om gegooid te worden. Er zijn zes mogelijkheden. De kans dat je een 1 gooit is dus $\frac{1}{6}$ ofwel 0,1667.

Kans noemen we ook **waarschijnlijkheid** (Eng: probability, symbool P). Kansen bereken je in het algemeen met de volgende formule.

kans

$$P = \frac{\text{aantal gunstige uitkomsten}}{\text{aantal mogelijke uitkomsten}}$$

Je noteert $P(x=1) = \frac{1}{6} = 0{,}1667$

a Hoe groot is bij een dobbelsteen $P(x = 4)$? En $P(x = 6)$? En in procenten?

b Hoe groot is $P(x = 4 \text{ of } x = 5)$?

c Wat betekent $P(x \neq 5)$? Hoe groot is die kans?

d Als je 6 keer met een dobbelsteen gooit zouden eigenlijk alle cijfers even vaak voor moeten komen; waarom gebeurt dat meestal toch niet?

e Als je 500 keer gooit hoeveel tweeën zouden er dan bij moeten zijn? Waarom is dit toch niet altijd het geval?

5.2

f Wat als je 1000 keer gooit? Onderzoek dit bij: http://www.stat.sc.edu/~west/javahtml/CLT.html

De kans dat je met een munt twee keer achter elkaar kop gooit is $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ofwel 0,25.

g Hoe groot is de kans dat je 10 keer achter elkaar munt gooit.
h Hoeveel is dat in procenten?

Kansen worden bepaald door de wenselijke (gunstige) uitkomsten ten opzichte van alle mogelijke uitkomsten.

i Hoeveel mogelijke uitkomsten (punten) zijn er bij 2 dobbelstenen? Maak een totaallijst (schema).
j Hoe groot is de kans op 12 punten dus $P(x = 12)$?
k Bij een loterij worden 125.000 loten verkocht. er zijn 150 prijzen. Hoe groot is de kans om een prijs te winnen?

Opgave 5.5

Kansrekening en medische testen

Kansrekening kan inzicht geven in de waarde van een bepaalde test. Een voorbeeld (bron Hans van Maanen, De Volkskrant):

Een zwangere vrouw kan een test laten doen op het syndroom van Down. Die test is niet feilloos. Bij vrouwen van 40 jaar heeft 1 % van de baby's het syndroom. Als een kind het syndroom heeft, is er 90 % kans dat de testuitslag positief is. Dat betekent dat 10 % die het syndroom heeft negatief test, men noemt dit *vals negatief*. Als de baby de aandoening niet heeft is er toch 1 % kans dat de uitslag positief is; dit heet *vals positief*.
Op het eerste gezicht lijkt dit een redelijk goede test, maar wat rekenen laat zien dat schijn bedriegt.
Een vrouw laat zich testen. De uitslag is positief. We willen uitrekenen hoe groot de kans is dat het kind werkelijk het syndroom van Down heeft.

a Ga uit van (bijvoorbeeld) 10.000 onderzochte vrouwen. Bereken bij hoeveel hiervan het syndroom van Down aanwezig is.
b Hoeveel testen er hiervan positief?
c Hoe groot is de groep waarin het syndroom niet aanwezig is?
d Hoeveel testen er hiervan positief?
e Hoeveel testen er dus totaal positief?
f Bereken de kans dat een positieve test ook werkelijk het Downsyndroom betekent.

$$\text{Kans} = \frac{\text{ziek en positief gemeten}}{\text{totaal positief gemeten}} \times 100\%$$

g Conclusie?

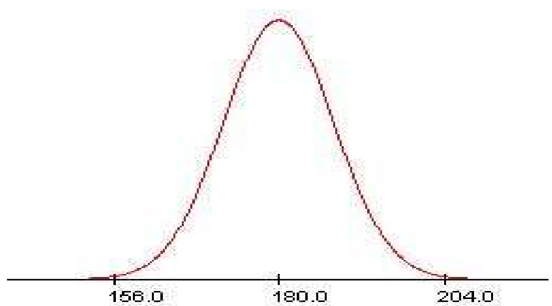
Voor vrouwen van 30 jaar geldt een kans van 1 op 1000 op Down.

h Hoe ziet de berekening er nu uit? Heeft deze test nog wel zin?

Opgave 5.6 Kansrekening en normaalverdeling

5.3

De gemiddelde lengte van een bevolkingsgroep van 60.000 mannen is normaal verdeeld met een gemiddelde van 180 cm en een standaarddeviatie van 8 cm.
(Op http://stat.wvu.edu/SRS/Modules/Normal/normal.html kun je snel een grafiek van deze waarden maken, zie onder)



Van de mannen is het 0,5$^{\text{de}}$ deel (50 %) groter dan 180 cm

a Hoeveel % van de mannen is langer dan 188 cm?

b Hoeveel mannen zijn dat?

c Hoe groot is de kans bij een steekproef dat een willekeurige man groter is dan 188 cm?

d Geef de juiste notatie: $P(\ldots > \ldots\ldots) = \ldots\ldots$

e Bereken $P(l < 164\text{ cm})$.

f Welke lengte hoort bij: $P(l > \ldots\text{ cm}) = 0{,}841$?
(het is gebruikelijk om 0,841 te schrijven i.p.v. 84,1 %).

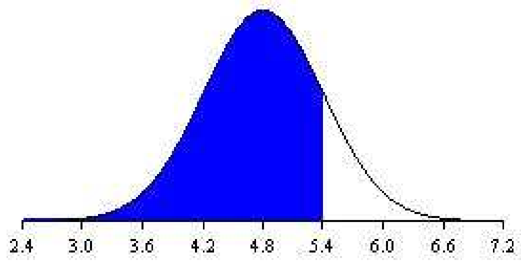
g Hoe groot is de kans dat iemand een lengte heeft tussen 196 cm en 204 cm? Geef het antwoord in de goede notatie.

h Maak een schatting hoeveel kans er is dat iemand een lengte heeft minder dan 168 cm.

Opgave 5.7 Standaard normaalverdeling

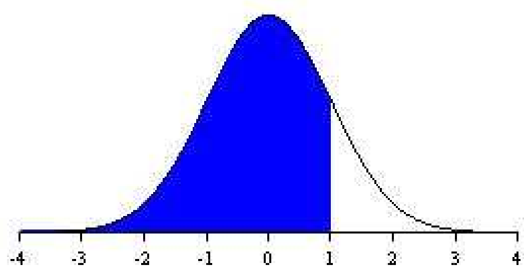
Het LDL cholesterolgehalte van mensen is normaal verdeeld met $\mu = 4{,}8$ en $\sigma = 0{,}6$.

a Kijk in de figuur hieronder. Hoe groot is de kans dat iemand een LDL cholesterolgehalte heeft beneden 5,4?



b Hoe groot is de kans dat iemand een LDL cholesterolgehalte heeft beneden 6,3? Kun je dit schatten?

Alle waarden tussen de afstanden van de standaarddeviaties zijn moeilijk te bepalen. Daarom is **de standaard normaalverdeling** bedacht. Hierin krijgen bij alle normaalverdelingen de afstanden in standaarddeviaties de vaste waarden:
-1, -2 en -3 en +1, +2 en +3: zie figuur hieronder.
Dit zijn de ***Z*-waarden** of ***Z*-scores**.



Het voordeel is dat je zo alle normaalverdelingen op dezelfde manier kunt berekenen.

c Laat zien dat $Z = 2,5$ voor een LDL cholesterolgehalte van 6,3.

De bijbehorende kansen zijn in een tabel te vinden: zie bijlage 2. Een gedeelte zie je hieronder.

Z	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**
....				
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957
....				

We zien dat $P(Z \leq 2,50) = 0,9938$.

07

07A

d Hoeveel % kans is er dat iemand een LDL cholesterolgehalte heeft beneden 6,3?

e En boven 6,3?

f Laat zien dat $Z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ door waarden in te vullen.

berekenen Z-waarde

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

Terugrekenen kan natuurlijk ook. 2 % van de mensen heeft een gevaarlijk hoog LDL cholesterolgehalte.

e Bereken deze gevaarlijke waarde.

Opgave 5.8

Hartslag

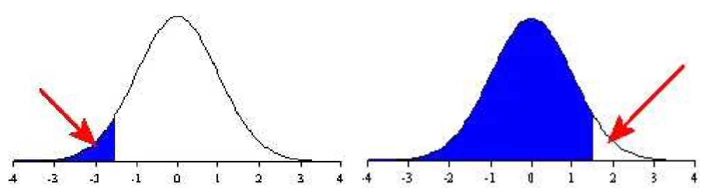
De hartslag (gemeten in rust) in BPM (aantal per minuut) van een bevolkingsgroep van 5000 mannen is normaal verdeeld met $\mu = 70$ en $\sigma = 10$.

a Hoeveel % van de mannen heeft een hartslag boven 90?

De *Z*-waarden in de tabel (bijlage 2) zijn alleen positief. Bij een negatieve Z-waarde moet je uitgaan van de positieve waarde en dan omrekenen vanaf 1 (of 100 %).

5.2

R3 We moeten uitrekenen hoe groot de kans is om bij een steekproef een man aan te treffen met een hartslag minder dan 55. Dat is het blauwe gebied in de tekening linksonder.



Bereken eerst $P(Z < 1{,}50)$.
Bereken $P(Z > 1{,}50)$.
Hoe groot is dus $P(Z < -1{,}50)$?

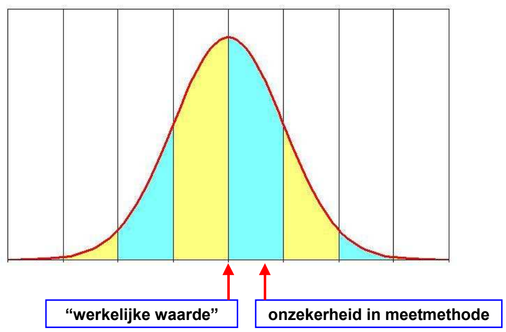
b Bereken hoeveel % van de mannen een hartslag heeft tussen 65 en 75. *Schets eerst altijd welk gebied je precies moet uitrekenen*!

Met behulp van software gaat dit allemaal veel sneller, zie:
http://davidmlane.com/hyperstat/z_table.html of
http://strader.cehd.tamu.edu/Mathematics/Statistics/NormalCurve/

Opgave 5.9

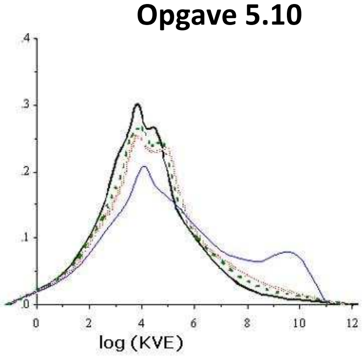
Standaard normaalverdeling en metingen

Het gehalte van een oplossing of het gehalte KVE in een monster heeft maar één waarde: de werkelijke waarde. Het heeft dus ook geen standaarddeviatie. Als we echter het gehalte gaan meten via een steekproef, krijgen we toch een gemiddelde met een spreiding (de standaarddeviatie). Die is volledig te wijten aan de onnauwkeurigheid van de meetmethode in combinatie met die van de analist.



Het totaal aan metingen dat gedaan kan worden kan daarom beschouwd worden als een normaal verdeelde populatie met standaarddeviatie.
Van een meetmethode is bekend dat de onnauwkeurigheid (variatiecoëfficiënt) 5 % bedraagt. Met deze methode wordt het suikergehalte van een oplossing bepaald. De werkelijke waarde hiervan bedraagt 23,5 mg/L.
Bereken de kans dat een van de metingen boven de 25,0 mg/L zal uitkomen.

Opgave 5.10



Standaard normaalverdeling en microbiologische metingen

De uitslagen van microbiologische meetmethoden zijn niet normaal verdeeld maar kennen een zogeheten Poissonverdeling. Dat komt door de enorme onzekerheid die optreedt bij dit soort metingen, met name bij zeer lage waarden, dus bij grote verdunningen.
Het is niet nodig om hier verder op in te gaan, want het blijkt dat de logaritmische waarde (^{10}logwaarde) van de uitslagen wel normaal verdeeld is, zie figuur links.
Van een monster is een aantal van 100 KVE geteld bij een verdunning van 10^2.

a Bereken het gehalte KVE in het monster.

De onnauwkeurigheid (standaarddeviatie) van de meetmethode is 0,15 (uitgedrukt in logwaarde)

b Bereken de 2σ grenzen van het gehalte in ${}^{10}\log$ (KVE).

c Bereken de 2σ grenzen van het gehalte in KVE.

d Hoe zie je aan de uitkomst van c dat de metingen in KVE niet normaal verdeeld zijn?

Opgave 5.11 **Lampen**

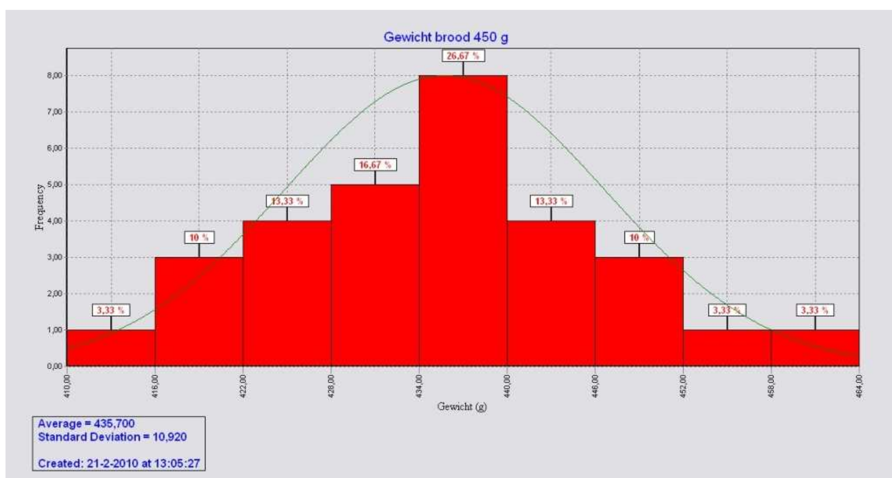
Een fabrikant maakt gloeilampen met een normaal verdeelde levensduur:
$\mu = 800$ uur en $\sigma = 40$ uur.

a Bereken de kans dat de gloeilamp die jij gekocht hebt kapot gaat voordat hij 700 uur gebrand heeft.

b Hoeveel uur houdt minstens 1 % van de lampen het vol?

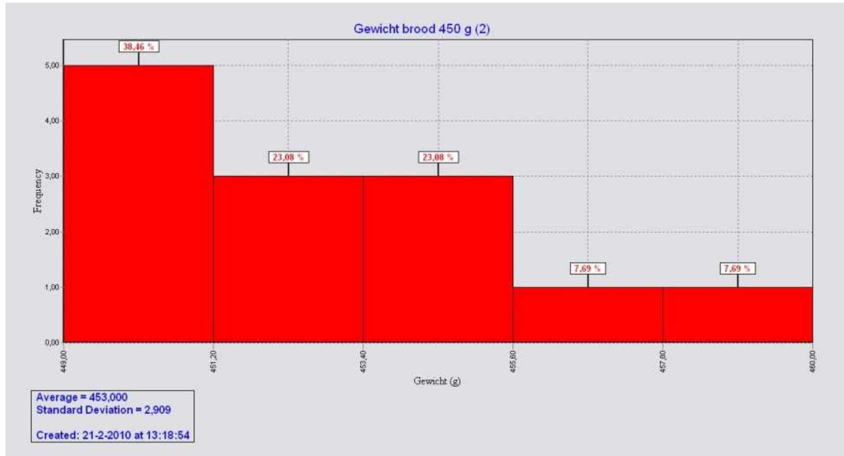
Opgave 5.12 **Kwaliteitscontrole bij de bakker**

Iemand vermoedt dat de bakker niet genoeg meel stopt in het brood van 450 g dat hij iedere dag koopt. Hij weegt het brood iedere dag en na 5 weken berekent hij een gemiddelde van 436 g en een standaarddeviatie van 11 g. Bovendien zet hij de 30 metingen in een histogram:



a Hoeveel % van de broden ligt beneden de waarde van 450 g? Levert de bakker dus waar voor zijn geld?

De klant gaat klagen bij de bakker en die belooft zijn leven te beteren. De klant controleert nog een aantal weken. Alle broden liggen nu tussen 449 g en 460 g met een gemiddelde van 455 g en een standaarddeviatie van 3 g. Dat lijkt dus dik in orde.
Voor de zekerheid maakt de klant toch nog een histogram, zie figuur.



b Heeft de bakker inderdaad zijn leven gebeterd?

5.3

R4 Goed of fout: voor een standaard normaalverdeling geldt: $\mu = 0$ ***en*** $\sigma = 1$

R5 Welke van de drie is goed: een waarde ***1,5σ*** onder het gemiddelde heeft een *Z*-waarde van –1,5; +1,5 of 3

Opgave 5.13

Chipszakken vullen

Op de verpakking van chips staat: 200g ℮.

a Hoeveel mag de inhoud dus afwijken (zie hoofdstuk 1)?

De verpakkingsmachine vult met een standaarddeviatie van 4 g.

b Hoeveel % van de zakken chips zullen niet voldoen aan de ℮ norm als de fabrikant de vulmachine instelt op 200 g ?

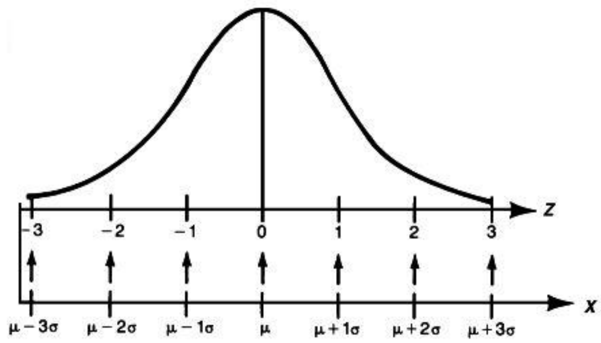
c Op hoeveel moet hij hem instellen om een uitval van minder dan 0,1 % te krijgen?

5.1

S1 Wat is een normaalverdeling? Hoe ontstaat hij?

S2 Welke verdeling van de % is er aan te geven? Doe dit met een voorbeeld.

S3 Neem de tekening over en leg daarbij uit wat de standaard normaalverdeling is.



S4 Wat betekent de formule: $Z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$?

S5 Wat betekent $P(x = € 100.000) = \dfrac{1}{250000}$ ***?***

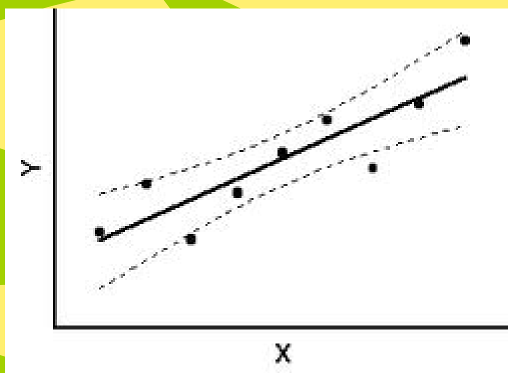
Geef een voorbeeld waar zo'n kans zich voor doet.

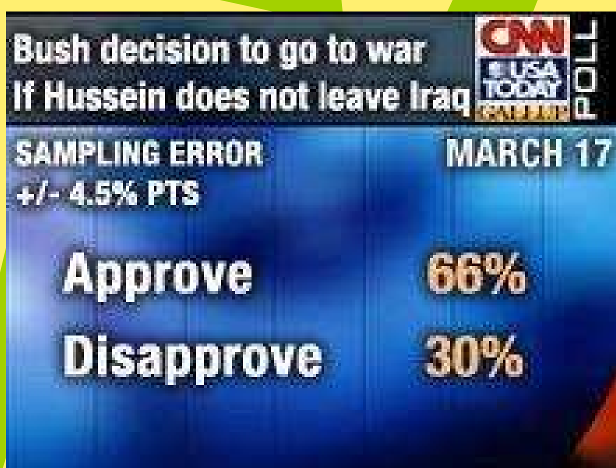
S6 Hoe groot is bij 2 dobbelstenen $P(x = 9)$?

S7 Leg uit hoe je met de standaard normaalverdeling de kans berekent dat een willekeurige man een gewicht heeft tussen 65 kg en 88 kg.

Gemiddelde = 85 kg en standaarddeviatie = 8 kg.

6 Van steekproef naar populatie





"Wij kunnen u geen levensverzekering geven omdat u al 102 bent." - "Dat begrijp ik niet. Het is toch statistisch bewezen dat op die leeftijd nog weinig mensen sterven."
W.van Broeckhoven

Wat zegt een steekproef?
Het zoutgehalte van een oplossing is in triplo bepaald met als uitslag $\bar{x}$ = 15,1 mg/L en σ_{n-1} = 0,2 mg/L.
Wat zegt dit nu over de werkelijke waarde van het zoutgehalte? Kunnen we daar met een redelijke *betrouwbaarheid* iets over zeggen?

Opgave 6.1 **Steekproeven**
Aan de hand van een ander voorbeeld gaan we dit onderzoeken.

De lengte van Nederlandse mannen

We willen de gemiddelde lengte van Nederlandse mannen boven de 20 jaar bepalen. We kunnen ze niet allemaal meten, dus nemen we een (aselecte, representatieve) steekproef om daaruit iets te kunnen zeggen over de hele populatie. We beginnen eenvoudig, met een steekproef van drie mannen, omdat we snel klaar willen zijn. De uitslag is dan $\bar{x}$ = 178,2 cm met σ_{n-1} = 9,1 cm.

a Zegt dit resultaat volgens jou al iets over de hele populatie? Leg uit.

We besluiten om een grotere steekproef te nemen en meten de lengte van 10 mannen. De uitslag is $\bar{x}$ = 181,2 cm met σ_{n-1} = 7,1 cm.

b Zegt dit resultaat volgens jou al iets meer over de populatie? Leg uit.

We verhogen nu het aantal samples van de steekproef fors naar 60 mannen en vinden dan $\bar{x}$ = 177,6 cm met σ_{n-1} = 7,5 cm.

c Komt ons doel al duidelijker in zicht? Leg uit.

We gaan iets anders proberen en herhalen de steekproef van 3 mannen 10 keer. We krijgen dan 10 gemiddelden. Dat doen we ook voor de steekproeven van 10 en 25 mannen. De resultaten staan in de volgende tabel.

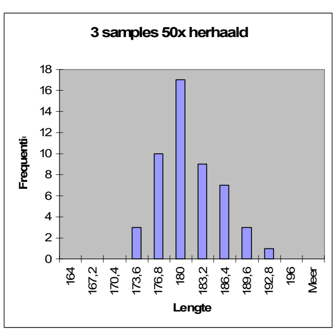
Bepaling gemiddelde lengte Nederlandse mannen (cm)					
3 samples		10 samples		25 samples	
gem	σ_{n-1}	gem	σ_{n-1}	gem	σ_{n-1}
168,4	8,5	178,0	10,2	178,9	8,9
181,3	12,0	178,1	8,6	180,0	9,4
182,2	7,4	180,9	8,3	179,3	7,8
181,5	9,1	176,5	9,8	180,4	6,9
175,5	8,9	183,8	8,2	178,3	8,6
179,7	8,9	179,3	7,4	180,1	9,6
180,6	10,5	178,8	9,4	181,7	6,6
177,8	5,2	178,4	5,3	179,9	7,7
181,6	10,6	183,8	8,6	180,3	6,9
181,1	11,6	178,9	4,9	178,4	6,8

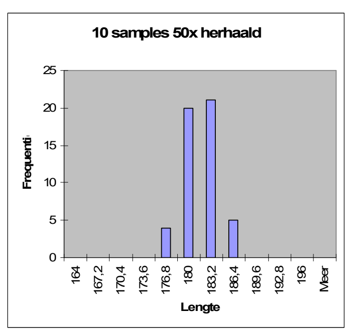
Op het oog zie je nog steeds weinig verschil, maar dat verandert als we naar het gemiddelde van de steekproefuitslagen gaan kijken en hun *standaarddeviatie*.

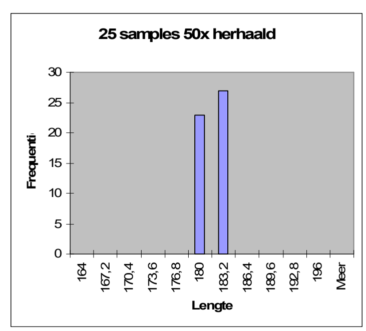
Bepaling gemiddelde lengte Nederlandse mannen (cm)					
gemiddelde van 10 steekproeven van 3 samples		gemiddelde van 10 steekproeven van 10 samples		gemiddelde van 10 steekproeven van 25 samples	
gem	179,0	gem	179,7	gem	180,7
σ_{n-1}	4,2	σ_{n-1}	2,5	σ_{n-1}	1,5

d Wat valt er nu op? Wat zou dat betekenen?

Het verschil wordt nog veel duidelijker als we alle steekproeven 50 keer uitvoeren en die in een histogram zetten:







Blijkbaar zijn de steekproefgemiddelden ook *normaal verdeeld*, maar hun standaarddeviatie neemt af als we het aantal samples groter maken.

e Streep het onjuiste door: de nauwkeurigheid neemt dus toe/af met het aantal samples.

We herkennen dit verschijnsel nog uit hoofdstuk 1. Bij n samples wordt de meting $\sqrt{n}$ keer nauwkeuriger.

Je kunt hiermee ook bewijzen dat het steekproefgemiddelde steeds dichter bij werkelijke waarde komt te liggen. Iets wat we allang vermoed hadden.

gemiddelde van alle steekproeven → gemiddelde van de populatie

Statistici noemen dit de **Centrale Limiet Stelling**.

f Maak een schatting van de gemiddelde lengte van de populatie mannen boven de 20.

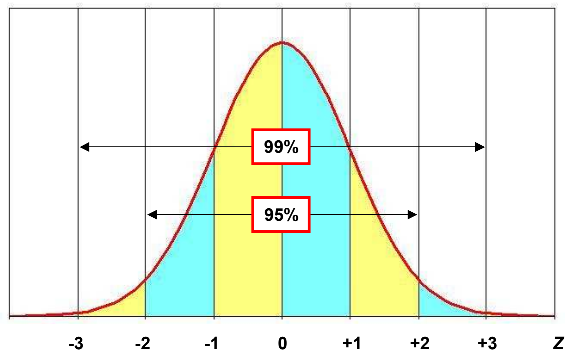
Men noemt dit een puntschatting, maar die is natuurlijk niet 100 % betrouwbaar (hij is zelfs 0 % betrouwbaar). Je kunt beter een interval opgeven waarin de werkelijke waarde waarschijnlijk ligt. Hiervoor maak je gebruik van de standaarddeviatie van de steekproefgemiddelden. Men noemt dit de **standaardfout**.

Standaardfout

De standaarddeviatie van *alle* steekproefgemiddelden. (standard error *SE*).

Bepaling gemiddelde lengte Nederlandse mannen (cm)					
gemiddelde van 10 steekproeven van 3 samples		gemiddelde van 10 steekproeven van 10 samples		gemiddelde van 10 steekproeven van 25 samples	
gem	179,0	gem	179,7	gem	180,7
SE	4,2	*SE*	2,5	*E*	1,5

Deze standaardfout kunnen we gebruiken om een uitspraak te doen over het interval waarin het gemiddelde van de populatie ligt.
We gebruiken hiervoor gewoon de Z-waarden uit de standaardnormaal verdeling.



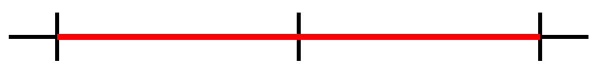
Zoals bekend ligt bij een normaalverdeling 95% tussen twee standaarddeviaties links en rechts van het populatiegemiddelde. (Het is eigenlijk niet precies 2 maar 1,96, zoals je uit de *Z*-tabel kunt berekenen.)

Met een **betrouwbaarheid van 95 %** kunnen we verwachten dat het gemiddelde van de populatie ligt tussen de twee waarden die 1,96 standaarddeviaties van het gemiddelde liggen. In wiskundige notatie:

$$\bar{x} - 1{,}96 \times SE < \mu < \bar{x} + 1{,}96 \times SE$$

Op een getallenlijn:

$\bar{x}$ - 1,96×*SE* $\quad$ $\bar{x}$ $\quad$ $\bar{x}$ + 1,96×*SE*



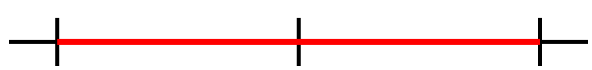
We gebruiken de resultaten van de steekproef met 25 samples.
$\bar{x}_{gem}$ = 180,7 cm met *SE* = 1,5 cm
Invullen geeft:

$$180{,}7 - 1{,}96 \times 1{,}5 < \mu < 180{,}7 + 1{,}96 \times 1{,}5$$

$$177{,}8 \text{ cm} < \mu < 183{,}6 \text{ cm}$$

Op een getallenlijn:

177,8 cm $\quad$ 183,6 cm



De conclusie van onze steekproeven (25 samples, 10 keer herhaald) is dus:

De gemiddelde lengte van Nederlandse mannen boven de 20 jaar ligt met een betrouwbaarheid van 95 % tussen 177,8 cm en 183,6 cm.

Men noemt dit een **betrouwbaarheidsinterval (symbool BI)**. In dit geval het 95 % betrouwbaarheidsinterval.
De wiskundige notatie voor de berekening is dus:

betrouwbaarheidsinterval BI bij bekende standaardfout *SE*

$$\boxed{\bar{x} - Z \cdot SE < \mu < \bar{x} + Z \cdot SE}$$

Het lijkt heel wat, 95 % betrouwbaarheid, maar het betekent ook 5 % onbetrouwbaarheid en dat is wel 1 op de 20. We komen hier later nog op terug.

g De Z-waarde voor 99 % betrouwbaarheid is 2,58. Bereken uit de steekproeven met 25 samples ook het 99 % betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde lengte. Conclusie?

h Bereken uit de steekproeven met 10 samples ook het 95 % betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde lengte. Vergelijk dit met het eerder gevonden interval. Conclusie?

Opgave 6.2 Standaardfout en populatie

Uit de standaardfout *SE* kun je de standaarddeviatie van de populatie berekenen. Je kunt namelijk wiskundig bewijzen dat de standaardfout ook gelijk is aan: $SE = \frac{\sigma_n}{\sqrt{n}}$

verband tussen de standaardfout *SE* en de standaarddeviatie van de populatie

$$\boxed{SE = \frac{\sigma_n}{\sqrt{n}}}$$

Hiermee kunnen we dus uit onze herhaalde steekproeven ook een schatting maken van de standaarddeviatie van de populatie σ_n.

Bepaling gemiddelde lengte Nederlandse mannen (cm)					
gemiddelde van 10 steekproeven van 3 samples		gemiddelde van 10 steekproeven van 10 samples		gemiddelde van 10 steekproeven van 25 samples	
gem	179,0	gem	179,7	gem	180,7
SE	4,2	*SE*	2,5	*SE*	1,5

a Bereken uit de drie gevonden standaardfouten in de tabel op van de herhaalde steekproeven drie schattingen van de standaarddeviatie van de populatie σ_n.
Welke van de drie is het meest betrouwbaar volgens jou?

Uit cijfers van het CBS (Centraal Bureau voor de Statistiek) blijkt dat de lengte van Nederlandse mannen boven 20 jaar normaal verdeeld is met een gemiddelde van 180,3 cm en een standaarddeviatie van 7,7 cm.

b Controleer of de formule klopt met de resultaten van de herhaalde steekproeven. Verwacht je dat het precies overeenkomt? Waarom?

Opgave 6.3 **Kan het niet met wat minder steekproeven?**

Het hoofdstuk begon met het probleem van het zoutgehalte van een oplossing dat in triplo bepaald was met als uitslag $\bar{x} = 15{,}1$ mg/L en $\sigma_{n-1} = 0{,}2$ mg/L. Kunnen we daar ook de standaardfout bij gebruiken?

250 keer? vette shit !!

Het is weinig aantrekkelijk om deze steekproef 10 keer te herhalen, laat staan om per steekproef 25 samples te gebruiken. Dat zou neerkomen op 250 analyses voor één uitslag. De chef lab zou niet blij zijn.

Gelukkig hebben statistici overal een oplossing voor. Je kunt de formule

$$SE = \frac{\sigma_n}{\sqrt{n}}$$

ook gebruiken om de standaardfout te berekenen als de standaarddeviatie van de populatie bekend is. Dan moeten we wel eerst bedenken van de populatie van het meten van een monster voorstelt.

Vergelijk:
lengtemeting triplo $\bar{x} = 181{,}2$ cm en $\sigma_{n-1} = 7{,}1$ cm
meting zoutgehalte $\bar{x} = 15{,}1$ mg/L en $\sigma_{n-1} = 0{,}2$ mg/L

6.1

R1 Waardoor wordt de spreiding in de resultaten van de lengtemeting bepaald? Uit de onnauwkeurigheid van de meetmethode of de verdeling van de lengte over de populatie van Nederlandse mannen? Of allebei?

R2 Waardoor wordt de spreiding in de resultaten van de zoutmeting bepaald? Uit de onnauwkeurigheid van mijn meetmethode of de verdeling van het zoutgehalte over de populatie (het monster)? Of allebei?

R3 Wat stelt de populatie eigenlijk voor bij zo'n gehaltebepaling?

Bij een analytische bepaling, bijvoorbeeld het fosfaatgehalte in een monster afvalwater, heeft het geen zin de standaarddeviatie van de populatie te bepalen. Gehaltes hebben maar één waarde en bezitten geen spreiding, zoals het gemiddelde inkomen in Nederland of het IQ. De standaarddeviatie van de steekproef wordt dan alleen veroorzaakt door de nauwkeurigheid van de meetmethode

Als die de nauwkeurigheid van de meetmethode bekend is, kunnen we de standaardfout uitrekenen en zo een betrouwbare uitspraak doen over het werkelijke zoutgehalte van het monster.
In een lab is dat het geval als de meetmethode **gevalideerd** is. De meetonzekerheid ligt dan vast. We kunnen de meetmethode zien als populatie met een standaarddeviatie als de meetonzekerheid van de meetmethode.

De gebruikte meetmethode van het zoutgehalte blijkt gevalideerd te zijn en heeft een meetonzekerheid van 2,5 %. Dit mogen we zien als variatiecoëfficiënt en dus kunnen we de standaarddeviatie berekenen.

a Bereken de standaarddeviatie.
b Bereken de standaardfout *SE.*
c Bereken het 95 % betrouwbaarheidsinterval voor de werkelijke waarde van het zoutgehalte.

We kunnen nu de hele berekening in één algemene formule samenvatten:

betrouwbaarheidsinterval BI bij bekende standaarddeviatie

$$\bar{x} - Z \cdot \frac{\sigma_n}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + Z \cdot \frac{\sigma_n}{\sqrt{n}}$$

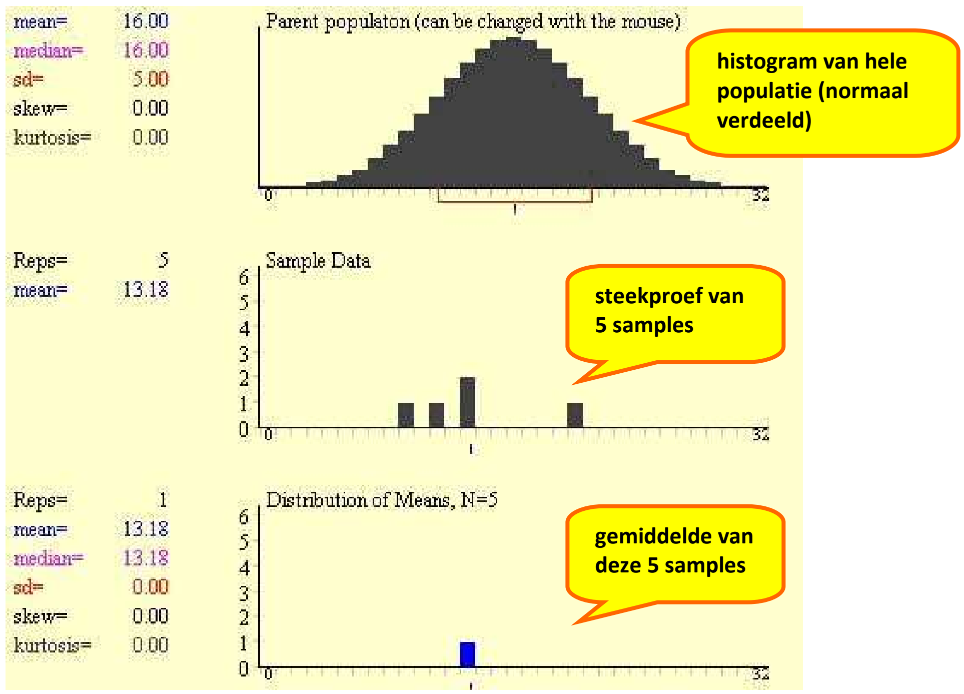
De opdrachtgever vindt de uitslag niet nauwkeurig genoeg.
d Wat kun je doen om het 95 % betrouwbaarheidsinterval kleiner te maken?
e Schiet de opdrachtgever er iets mee op als je hem het 99 % betrouwbaarheidsinterval aanbiedt? Hoe zou dat komen?
f Reken uit hoe groot de steekproef minstens moet zijn om een afwijking van maximaal 2 % te krijgen.

Opgave 6.4

6.1

Simulatie van steekproeven uit een populatie

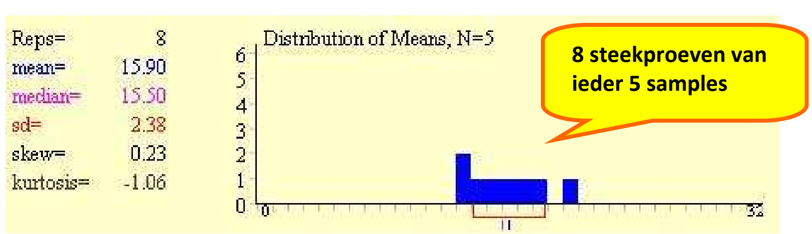
Op de website:
http://onlinestatbook.com/stat_sim/sampling_dist/index.html
kun je steekproeven nemen uit een verzameling data. Zie het voorbeeld hieronder:



a Hoe groot was de steekproef?

b Hoeveel % wijkt het gemiddelde van de steekproef af van het gemiddelde van de populatie?

De steekproef wordt een aantal malen herhaald:



c Hoeveel waarnemingen zijn nu in totaal gedaan?

d Hoe groot is de afwijking nu? Conclusie?

e Hoe groot is de fout?

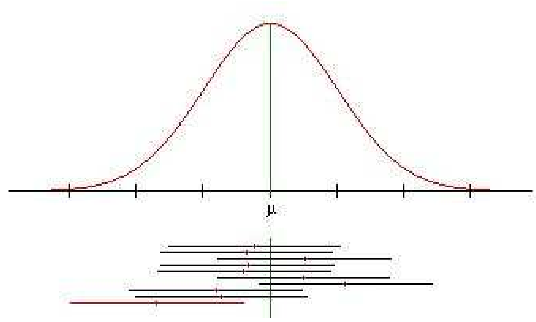
f Bereken uit de standaardfout een schatting voor de standaarddeviatie van de populatie en controleer deze.

Opgave 6.5

6.2

Betekenis van het betrouwbaarheidsinterval

Op de website
http://bcs.whfreeman.com/ips4e/cat_010/applets/confidenceinterval.html
wordt een steekproef genomen uit een populatie en wordt het bijbehorende betrouwbaarheidsinterval van het gemiddelde weergegeven.



a Hoeveel steekproeven zijn genomen in de figuur?

b Hoeveel % van de intervallen bevatten het gemiddelde van de populatie?

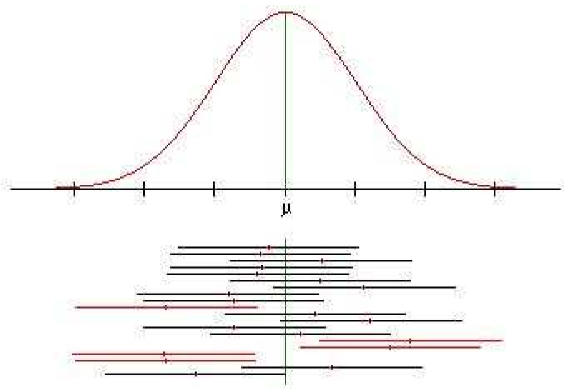
Je ziet hier goed de betekenis van een betrouwbaarheidsinterval.

Betekenis van het betrouwbaarheidsinterval

Een betrouwbaarheid van 95 % betekent dat als je 100 steekproeven neemt, de werkelijke waarde in 95 gevallen ook in het interval ligt. Bij 5 steekproeven valt hij er buiten.
Dus gemiddeld 1 op de 20 uitslagen is verkeerd. Dit is algemeen geaccepteerd in laboratoria en wetenschappelijk onderzoek. Als je er even over nadenkt is dat toch wel heel bijzonder.

N.B. Vaak wordt gezegd: "de kans dat de werkelijke waarde μ in het gevonden interval ligt, is 95 %." Dat klopt vaak wel, maar niet altijd. Het populatiegemiddelde μ is weliswaar onbekend maar heeft wel een constante waarde.
Een voorbeeld: gevonden 6,7 mg/L < μ < 8,2 mg/L
De werkelijke waarde zou 8,5 mg/L kunnen zijn (in gemiddeld 1 op de 20 steekproeven kan dat gebeuren.)
Het zou dan een beetje bizar zijn om te zeggen: "er is 95 % kans dat 8,5 tussen 6,7 en 8,2 in ligt". Die kans is natuurlijk 0 %.
Je mag wel zeggen: er is 95 % kans dat de uitspraak 6,7 mg/L < μ < 8,2 mg/L juist is.

c Na 20 steekproeven is de stand veranderd, zie onderstaande figuur. Hoeveel % score hebben we nu?



d Onderzoek zelf met de simulatie hoeveel steekproeven je moet nemen zodat de gewenste betrouwbaarheid bereikt wordt.

Opgave 6.6

Schatting van het populatiegemiddelde bij een kleine steekproef

Vaak kennen we de standaarddeviatie σ_n van de populatie niet. In het lab gaat het dan over aparte of ongevalideerde meetmethoden.
In dat geval zullen we de standaarddeviatie σ_{n-1} van de steekproef als *schatting* moeten gebruiken voor de standaarddeviatie σ_n.
De formule wordt dan:

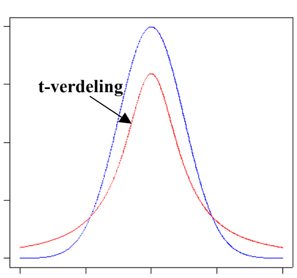
$$\bar{x} - Z \cdot \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + Z \cdot \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}$$

De consumentenbond controleert het gehalte zinkacetaat (een smaakversterker met het E-nummer E650) in kauwgom. Het maximaal gehalte is 1,0 g/kilogram.
Er wordt één monster 5 keer gemeten (n =5) met als uitslag $\bar{x}$ = 1,53 g/kg en σ_{n-1} = 0,18 g/kg.
We gaan het 95% betrouwbaarheidsinterval berekenen.

Nu ontstaat er echter een probleem. De formule

$$\bar{x} - Z \cdot \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + Z \cdot \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}$$

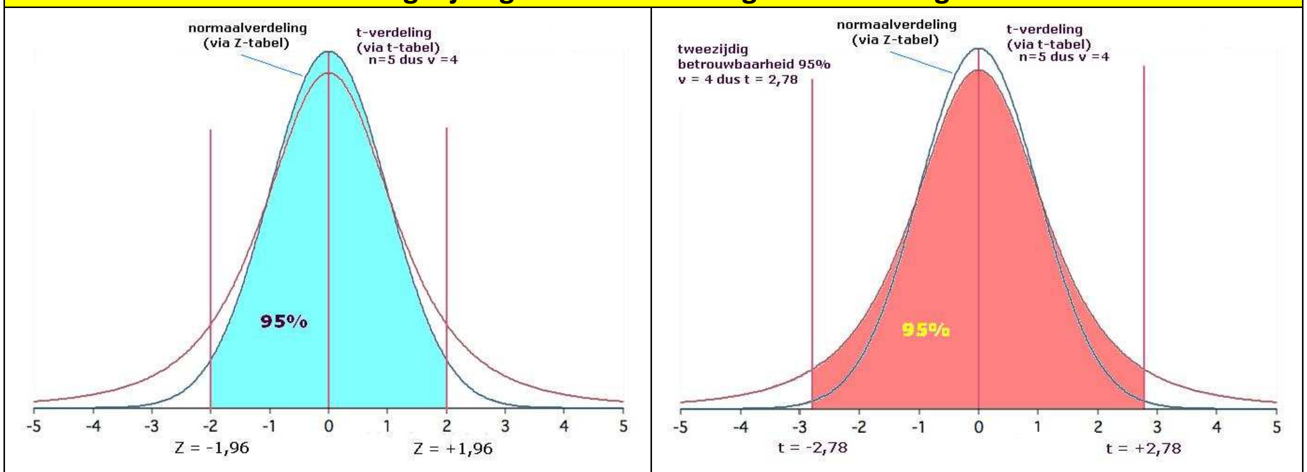
mag niet zomaar gebruikt worden. Steekproefgemiddelden hebben namelijk wel een normaalverdeling maar alleen bij *grote aantallen*.
Bij kleine steekproeven blijken ze een zogenoemde ***t*-verdeling** te hebben.



Die lijkt op de normaalverdeling maar is “iets in elkaar geduwd”, zie figuur links. Daardoor liggen de 95% waarden verder van het gemiddelde dan bij de normaalverdeling. De t-waarde is bij 95 % dan groter dan de Z-waarde.

De t-verdeling verschilt ook met het aantal samples in de steekproef. Daardoor is het eigenlijk een verzameling verdelingen. Op de volgende pagina een voorbeeld voor $n = 5$.

Vergelijking normaalverdeling en *t*-verdeling



De normaalverdeling	**De *t*-verdeling voor *n* = 5**

De formule wordt dan:

betrouwbaarheidsinterval BI van het populatiegemiddelde berekend uit een steekproef

$$\bar{x} - t \cdot \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t \cdot \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}$$

De waarden van t zijn te vinden in een tabel (zie bijlage **3**). Je moet hier de waarde nemen in de tabel voor **tweezijdig toetsen**, omdat we niet weten of de werkelijke waarde onder of boven het steekproefgemiddelde ligt. Je kunt de waarden vinden voor 90 %, 95 % en 99 % betrouwbaarheid.

tweezijdig	**80%**	**90%**	**95%**	**98%**	**99%**
v					
1	3,08	6,31	12,71	31,82	63,66
2	1,89	2,92	4,30	6,96	9,92
3	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84

***v* = het aantal vrijheidsgraden**
***v* = *n* -1**

vrijheidsgraden

Bij deze tabellen gebruikt men het begrip ***vrijheidsgraad****. Dat is gelijk aan het aantal min één. De term vrijheidsgraad kan als volgt begrepen worden:*
Als 3 mensen uit 3 voorwerpen mogen kiezen, is het aantal keuzes (vrijheidsgraden):

nummer 1 3 keuzemogelijkheden
nummer 2 2 keuzemogelijkheden
nummer 3 heeft niets meer te kiezen!
Bij een aantal van n = 3 kan er dus maar 2 keer vrij gekozen worden.
Er zijn 2 vrijheidsgraden en dus v = n – 1

9

a Zoek de waarde op van t voor de steekproef van de zinkacetaat bepaling. Ga uit van 95 % betrouwbaarheid en tweezijdig toetsen.

10

b Bereken het 95 % betrouwbaarheidsinterval van de werkelijke waarde van het gehalte zinkacetaat in de kauwgom.

c Voldoet het gehalte zinkacetaat aan de norm?

De t-verdeling is ontdekt door een kwaliteitsmedewerker van de Guinness brouwerij, William Gosset genaamd. Omdat hij van zijn baas niet onder zijn eigen naam mocht publiceren, schreef hij artikelen onder het pseudoniem 'student'. De t-verdeling heet daarom ook wel 'Student t-verdeling'.

6.2

R1 Waarom is het 90 % betrouwbaarheidsinterval kleiner dan het 95 % betrouwbaarheidsinterval?

R2 Leg in dit verband de uitspraak uit: hoe groter je de nauwkeurigheid van een steekproef wilt hebben, des te kleiner wordt de betrouwbaarheid.

R3 Wat gebeurt er met het betrouwbaarheidsinterval, als je de steekproef groter maakt? Laat dit zien met behulp van de formule.

R4 Hoe zie je in de grafiek dat de t-verdeling bij kleine steekproeven een grotere onnauwkeurigheid in de t-waarde oplevert?

samenvattend
3 vormen van een betrouwbaarheidsinterval

heel veel steekproeven	$\bar{x} - Z \cdot SE < \mu < \bar{x} + Z \cdot SE$
σ_n van de populatie is bekend (gevalideerde meetmethode)	$\bar{x} - Z \cdot \frac{\sigma_n}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + Z \cdot \frac{\sigma_n}{\sqrt{n}}$
een "normale" steekproef	$\bar{x} - t \cdot \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t \cdot \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}$

Opgave 6.7

Schatting van het populatiegemiddelde bij een grote steekproef
Het gemiddelde netto maandinkomen van Nederlanders in 2008 is met een steekproef van 200 samples bepaald. De uitslag was:

$\bar{x}$ = € 1594 en σ_{n-1} = € 118. We gaan ervan uit dat het inkomen normaal verdeeld is.

a Bereken het 90 % betrouwbaarheidsinterval van het gemiddelde inkomen.

b Was het interval veel anders geworden als de steekproef uit 190 samples had bestaan? Laat zien met een berekening.

Opgave 6.8 **BI bij controles - Koloniegetalbepaling**

Een betrouwbaarheidsinterval kan heel goed gebruikt worden om uit een steekproef te controleren of de werkelijke waarde significant boven of onder een bepaalde toegestane grens valt. Een voorbeeld.

Levensmiddelen worden op bacteriën onderzocht d.m.v. een koloniegetalbepaling. Men bepaalt dan het aantal kolonievormende eenheden (KVE) ook wel kiemgetal genoemd.

De Voedsel en Waren Autoriteit (VWA) heeft een partij consumptie-ijs onderzocht op *Enterobacteriaceae* bacteriën.

De uitslag is:

$\bar{x}$ = 75 KVE/g

σ_{n-1} = 12 KVE/g

n = 5

a Bereken het 95 % betrouwbaarheidsinterval van het gemiddelde.

De maximaal toegestane waarde is 100 KVE/g (EU norm ISO 21528-1/2).

b Voldoet het onderzochte ijs aan deze norm?

Opgave 6.9 **Controle - Zout in mineraalwater**

Mineraalwater mag net als drinkwater uit de kraan volgens de Nederlandse norm maximaal 150 mg/L keukenzout bevatten. Jouw lab heeft een steekproef gedaan en 25 verschillende soorten mineraalwater gemeten.

De uitslag was: $\bar{x}$ = 130 mg/L en σ_{n-1} = 12 mg/L

a Bereken het 95 % betrouwbaarheidsinterval van het gemiddelde.

b Geef een schatting voor de standaarddeviatie van de populatie.

c Hoeveel % van flessen zal (waarschijnlijk) meer dan 150 mg/L zout bevatten?

Opgave 6.10

BI van verschillen: is het gehalte significant gedaald?

Van een meetmethode voor bepaling van het hormoon hCG in het bloed is bekend dat de variatiecoëfficiënt 5 % is. Er is een waarde gemeten van 500 UI/L.

a Bereken de standaarddeviatie van de meetmethode.

b Bereken hiermee het 95 % betrouwbaarheidsinterval van de meting.

Je kunt hiermee ook significante verschillen opsporen. De volgende dag wordt een hCG waarde gemeten van 475 UI/L. Is dit verschil significant?

We berekenen nu het 95 % betrouwbaarheidsinterval van het verschil. We moeten ons realiseren dat beide metingen een afwijking hebben die ook niet hetzelfde is.

c Bereken de *gecombineerde* standaarddeviatie (zie hoofdstuk 2).

d Bereken nu op dezelfde manier als bij b het 95 % betrouwbaarheidsinterval van het verschil.

f Als er geen verschil is welke getal zou dan in het ideale geval binnen het interval moeten liggen? Verschilt de tweede meting dus significant?

Opgave 6.11

Statistisch significant of praktisch significant?

De werkzaamheid van twee soorten afslankpillen wordt vergeleken. Na 1 jaar gebruik worden in twee vergelijkbare groepen de volgende resultaten gemeten:

Merk	gemiddelde gewichtsafname Δm (kg)	betrouwbaarheidsinterval van Δm (kg)
A	3,5	$1,0 < \Delta m < 5,5$
B	5,5	$-0,5 < \Delta m < 10,5$

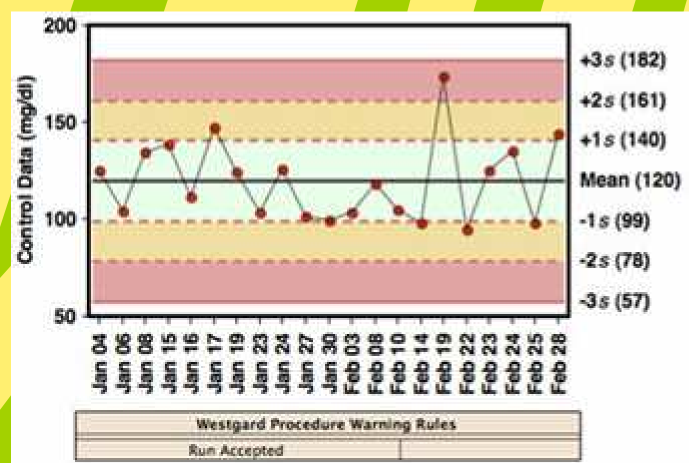
a Bekijk deze uitslagen. Probeer goed te begrijpen wat de betekenis van deze getallen is.

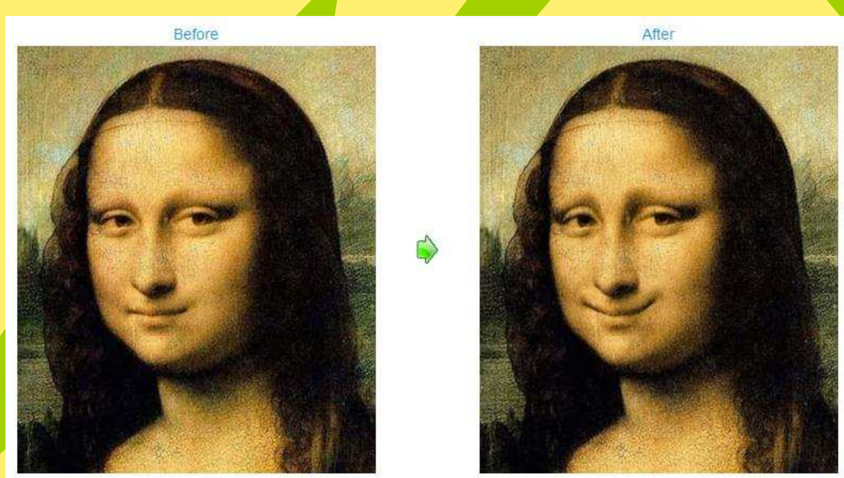
b Welk middel zou jouw voorkeur hebben en waarom?

6.1

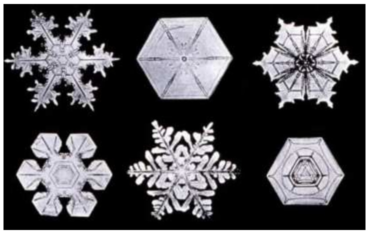
S1 Waarom mag je niet zomaar een gevonden uitslag doorgeven?
S2 Wat betekent de centrale limietstelling?
S3 Hoe bereken je de standaardfout en wat betekent hij?
S4 Wat wordt bedoeld met een betrouwbaarheidsinterval?
S5 Welke soorten zijn er?
S6 Wat is de t –verdeling?
Waarvoor wordt die hier gebruikt?
S7 Maak een duidelijk stappenplan om de betrouwbaarheidsintervallen te bepalen.

7 Kwaliteitszorg en controlekaarten





Kwaliteitsverbetering



sneeuwvlokken (foto uit 1902)

Geen twee keer hetzelfde

Bij iedere meting treden onnauwkeurigheden of meetfouten op. Deze zorgen ervoor dat je nooit twee keer precies dezelfde uitslag krijgt..

Hoe komt dat?

- geen twee mensen zijn hetzelfde;
- geen twee patiënten zijn hetzelfde (ziekenhuisonderzoek);
- geen twee sneeuwvlokken zijn hetzelfde (zie foto);
- omstandigheden veranderen.

Opgave 7.1 **Variaties**

a Zet je handtekening.
Zet hem eronder nog een keer. Zijn ze hetzelfde? Precies?

b Is een halve liter bier altijd precies 0,500000 L? Waarom niet?

In een zak zitten 20 rode ballen en 80 blauwe. Je trekt steeds 20 ballen uit de zak, telt de rode en zet deze in een grafiek:

c Had je deze uitkomst verwacht?

d Hoeveel rode ballen verwacht je gemiddeld te trekken?

e Waarom is dat niet iedere keer hetzelfde?

f Kan het voorkomen dat je 20 rode ballen trekt?
Maak eens een schatting van die kans.

Opgave 7.2 **Oorzaken van variaties en controlekaarten**

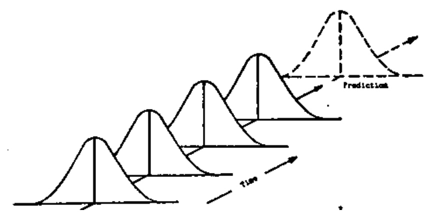
Verzin voorbeelden hoe de volgende bronnen variaties kunnen veroorzaken in data zoals waarnemingen en metingen.

1 mensen
2 materialen
3 machines en apparaten
4 metingen
5 omstandigheden (omgeving).

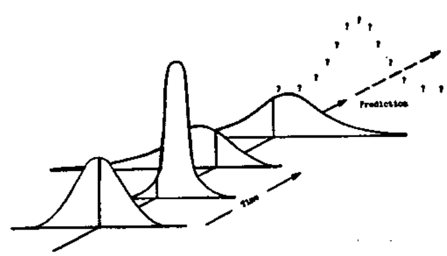
Theorie
Shewhart van Bell Telephone Laboratories heeft in 1924 gezegd dat er twee soorten variaties zijn met verschillende oorzaken:

toevallige en aanwijsbare oorzaken

Toevallige oorzaken
(Engels: random causes), aanwezig in ieder proces en niet te vermijden. Bijvoorbeeld: het trekken van rode ballen; we verwachten een normaalverdeling, ook in de toekomst: figuur rechts. Als er alleen toevallige oorzaken zijn is het proces onder controle (Eng. “in control”).



Aanwijsbare, speciale oorzaken
(Engels: special causes), die niet gewenst zijn en vermeden kunnen worden. Als er zich speciale oorzaken voordoen is het proces niet onder controle (Eng. “out of control”) en moet er ingegrepen worden.
Men spreekt ook wel van *onbeheerste kwaliteit.*



out of control
onbeheerste kwaliteit

Een proces is onder controle als we op basis van ervaringen in het verleden, binnen zekere grenzen kunnen voorspellen hoe het zich in de toekomst zal gedragen.

Walter A. Shewhart, 1931

Hoe stellen we nu vast of de kwaliteit onbeheerst is of onbeheerst dreigt te raken? Het hulpmiddel hierbij vormen zogenoemde (proces)**controlekaarten**. In het Engels SPC charts: Statistical Process Control charts.
Hierin worden de eigenschappen (variabelen) van het proces weergegeven, die gemeten worden als functie van de tijd.

Opgave 7.3

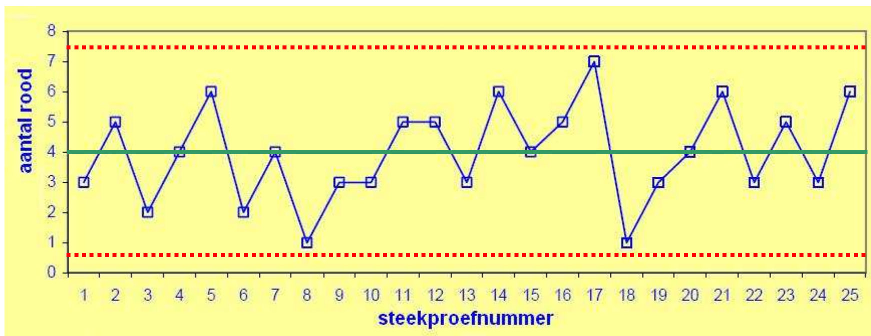
Controlekaarten van losse (enkele) meetwaarden

Een controlekaart wordt vaak een *Shewhartkaart* genoemd. Hij komt in veel verschillende vormen voor.
In een controlekaart van losse (enkele) meetwaarden vinden we:

- een centrale lijn (de gemiddelde waarde of soms de mediaan);
- controlegrenzen (twee of drie);
- de losse achtereenvolgens gemeten waarden.

Zo'n kaart heet in de analytische chemie een ***X*-kaart** (*x* = enkele meetwaarde). In het Engels ***X*-chart** of ***I*-chart** (*I* = individual).
Bij de klinische chemie spreekt men ook wel ooit van **Levey-Jenningskaart** (naar de uitvinder).

Als voorbeeld de rode ballenkaart.



De waarden van de grenzen hangen af van wat er gecontroleerd wordt.

Controle van patiënten

De gezondheidstoestand van patiënten wordt al sinds tijden bijgehouden in controlekaarten. Iedereen kent het bijhouden van de temperatuur in de zogenoemde ziekenhuisgrafiek.
De alarmeringsgrenzen worden hier gevormd door de **medische referentiewaarden** van de gemeten grootheid.

Een medisch voorbeeld.
De waarde van het LDL cholesterol van een 45 jarige patiënt worden maandelijks gemeten. De medische referentiewaarden voor deze groep zijn 3,6 < LDL < 4,4 mmol/L.

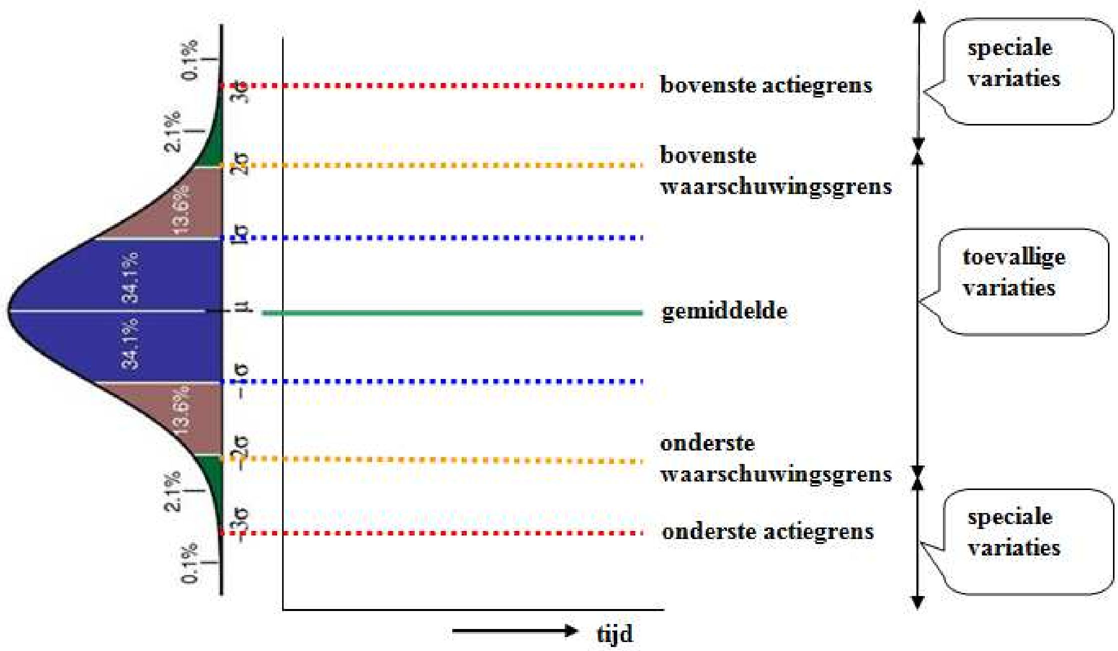
LDL cholesterol van patiënt XXX										
maand	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
LDL	3,9	4,0	3,8	4,3	4,1	4,6	4,0	4,4	4,8	4,9

a Maak een controlekaart van de uitslagen met grenzen.
b Welke conclusies zou je kunnen trekken?

Opgave 7.4 **Controlekaarten voor apparatuur of meetmethode**

Controlekaarten worden gebruikt om bijvoorbeeld de herhaalbaarheid, de reproduceerbaarheid of de juistheid van een meetmethode te controleren.

In dat geval worden de controlegrenzen meestal gekozen op afstanden van 2σ en 3σ vanaf het gemiddelde (de gewenste waarde). We gaan daarbij uit van een normale verdeling. In deze controlekaart worden de metingen tegen de tijd uitgezet: zie figuur hieronder.



a Hoe groot is de kans dat een meting buiten de 2σ grenzen valt?
b En buiten de 3σ grenzen?

Hoe stel je nu een controlekaart op? Het is duidelijk dat je waarden moet hebben om mee te starten.
Zoals we al weten zijn er twee mogelijkheden:
1 Een controlemonster kopen.
2 Zelf een controlemonster maken en met een steekproef zo goed mogelijk de waarde bepalen..

Het stappenplan staat in het volgende tekstvak.

opstellen (starten) van een controlekaart

1. Koop een controlemonster en gebruik de door de leverancier opgegeven grenzen,
   of
   Doe tenminste 10 (liever 15) bepalingen van een zelfgemaakt controlemonster met behulp van de methode of het apparaat dat je wilt controleren.
2. Bereken het gemiddelde $\bar{x}$ en de standaarddeviatie σ_{n-1}.
3. Bereken de 1σ, de 2σ en 3σ grenzen.
4. Teken de controlekaart.
   Je hebt nu een lege controlekaart waarin je de uitslagen van het controlemonster in de toekomst kunt uitzetten om de kwaliteit van je meetmethode te bewaken.

Opgave 7.5

Kwaliteitscontrole bij de melkproductie

Bij de melkproductie moet het vetgehalte van rauwe melk worden bepaald. Een controlemonster wordt 10 maal gemeten:

laborant in een melkfabriek (1940)

Controlemonster vetgehalte melk (g/L)									
45,2	45,1	44,8	45,7	43,7	44,2	46,5	43,4	44,9	45,0

a Bereken het gemiddelde en de standaarddeviatie.
b Bereken de 2σ en 3σ grenzen.
c Teken de controlekaart.

De meetmethode wordt dagelijks gecontroleerd.
Na 8 werkdagen zijn de volgende waarden gevonden:

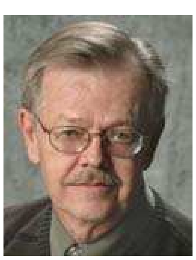
Controlemonster vetgehalte melk (g/L)							
1	2	3	4	5	6	7	8
45,3	45,1	44,4	44,1	44,8	45,9	45,6	44,7

12

d Zet deze waarden in de controlekaart.
e Zie je hier alleen toevallige variaties of is er meer aan de hand?

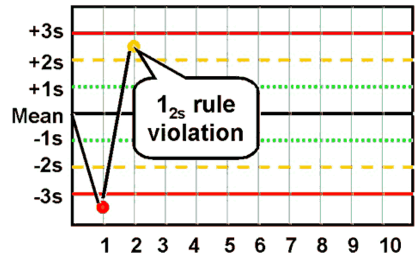
Opgave 7.6

Hoe bepalen we nu of de kwaliteit onbeheerst is?

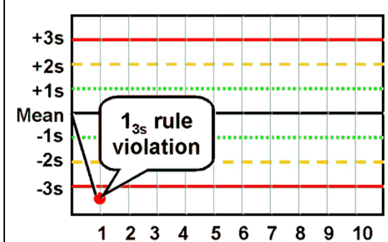
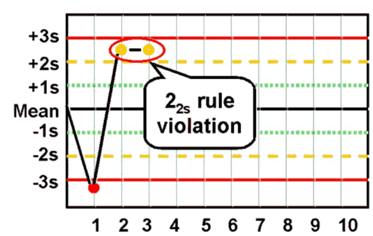
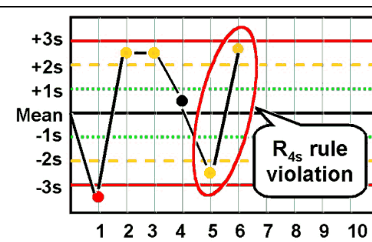


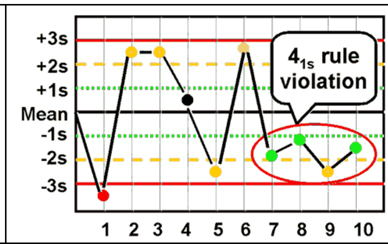
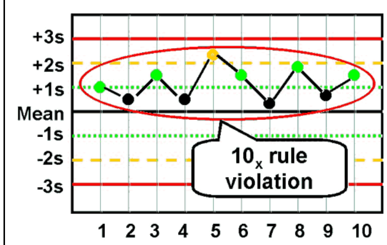
Westgard Regels

Regels om afwijkingen op te sporen in controlekaarten zijn ontwikkeld door James Westgard, professor klinische chemie en pathologie in Wisconsin, USA (zie foto). De belangrijkste **Westgard Regels** staan in onderstaande tabel.

Westgard Waarschuwingsregel	
$1_{2\sigma}$ – regel Deze regel wordt overtreden als de controlewaarde de $\pm\,2\sigma$ grens overschrijdt; dit zou slechts in 5 % van de gevallen voor mogen komen.	
De plaatjes komen van [http://www.westgard.com.](http://www.westgard.com) Hier is veel nuttige informatie te vinden over de controleregels en over kwaliteitscontrole in het algemeen.	

7.1

Westgard Actieregels	
$1_{3\sigma}$ – regel Deze regel wordt overtreden als de controlewaarde de $\pm\,3\sigma$ grens overschrijdt. De waarde is dan “out of control” en wordt afgekeurd. Er moet actie ondernomen worden. Meestal: ▪ de meting herhalen; ▪ onderzoek doen naar de oorzaak; ▪ na opheffen oorzaak herhalen van de meting; ▪ nieuwe kaart starten.	
$2_{2\sigma}$ – regel Deze regel spoort systematische fouten op en wordt overschreden als 2 opeenvolgende metingen dezelfde 2σ grens overschrijden. Hier moet actie ondernomen worden (zie de $1_{3\sigma}$ – regel).	
$R_{4\sigma}$ – regel Deze regel wordt overtreden als een controlewaarde in de groep de $+2\sigma$ grens overschrijdt en een andere de -2σ grens. Ook nu moet actie ondernomen worden.	

$4_{1\sigma}$ – regel Deze regel wordt overschreden als 4 opeenvolgende metingen dezelfde 1σ grens overschrijden. Ook nu moet actie ondernomen worden.	
10_x – regel Deze regel wordt overtreden als de controlewaarde 10 × achter elkaar aan dezelfde kant van het gemiddelde valt. Ook nu moet actie ondernomen worden. **NB.** in sommige labs hanteert men liever de **8_x – regel**	

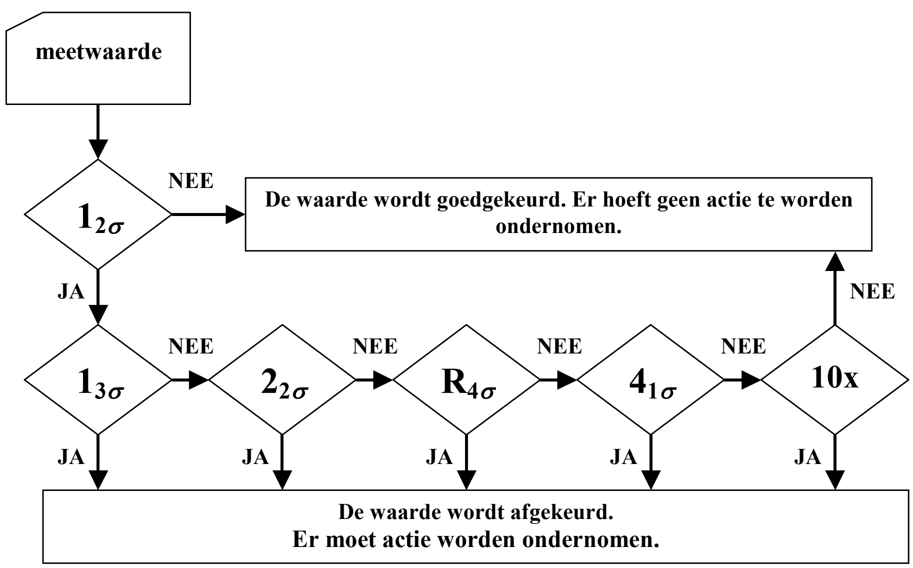
Bekijk de controlekaart uit de vorige opgave.

a Worden een of meer regels overtreden?

b Zo ja, welke?

c Is er actie nodig?

Je kunt de hele procedure in een schema weergeven:

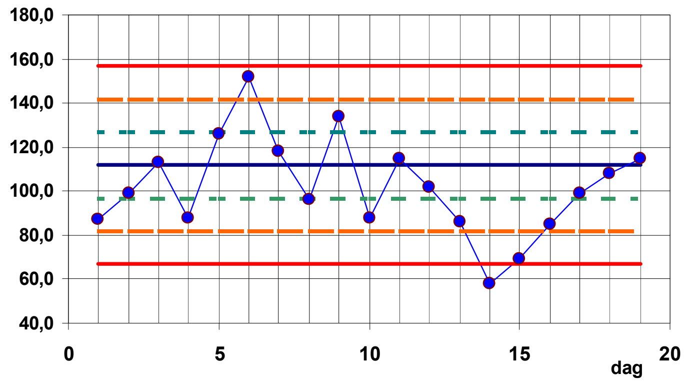


Opgave 7.7

Is er actie nodig? 1

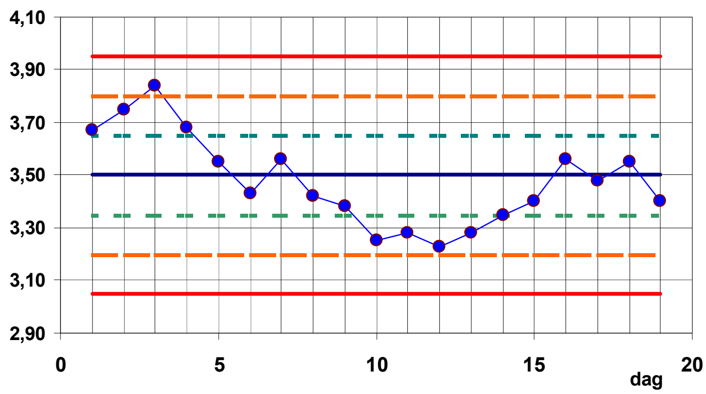
Bekijk de volgende controlekaarten. Gebruik de Westgard Regels en onderzoek of er een of meer overtreden worden en op welk(e) moment(en) actie nodig was geweest.

a een willekeurige meetserie:



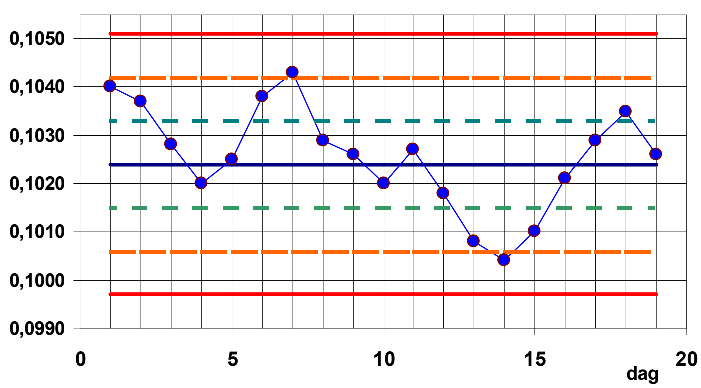
b een controlemonster bij een kopersulfaatbepaling.

controlemonster kopersulfaat (mg/L)



c de standaardoplossing NaOH in het lab

standaardoplossing NaOH (mol/L)



Opgave 7.8

Controleregels in chemie en microbiologie

Controlemonsters noemt men meestal **Standaard Referentiemateriaal SRM**. (Engels: CRM Certified Reference Material) en worden geleverd in de vorm van een controlepil, zie de volgende bijsluiter.

DESCRIPTION OF THE REFERENCE MATERIAL	
Name	Escherichia coli
Batch number	3F-0901
Date of issue	8 January 2009
Matrix	Milk
Volume	1.5 ml
PROPERTY VALUE	
Quantity value	8200 cfu/ml Stored at –80°C
Combined uncertainty (U_c)	2500 cfu/ml

De gecombineerde onzekerheid (combined uncertainty) in het koloniegetal van het controlemonster geeft de 2σ grenzen aan van de werkelijke waarde van het monster.

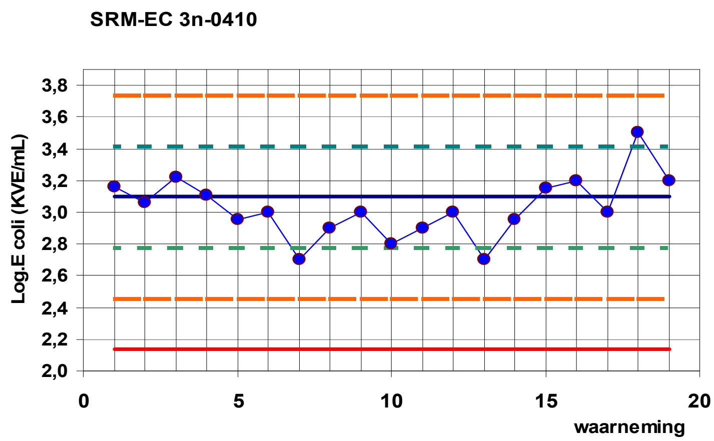
a Bereken de 1σ en de 3σ grenzen van de controlekaart van het gegeven monster.

regels voor chemie en microbiologie

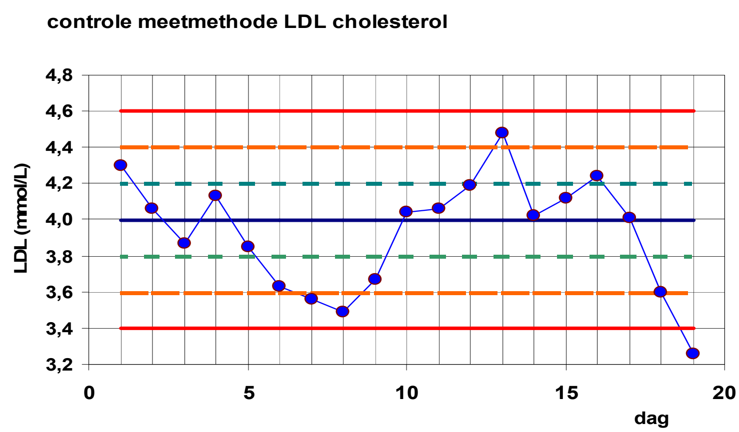
De normen die gelden voor chemische en microbiologische analyses zijn landelijk afgesproken en vastgelegd in de norm NPR 6603 (2010).
De waarschuwingsregel is ook $1_{2\sigma}$ en soms wordt ook nog $3_{1\sigma}$ gehanteerd.
De gebruikte actieregels zijn
$1_{3\sigma} - 2_{2\sigma} - 4_{1\sigma}$

Bekijk de volgende controlekaarten. Kijk of er een of meer Westgard regels overtreden worden en op welk(e) moment(en) actie nodig was geweest.

b Het bewaken van standaard referentiemateriaal van E.colibacteriën.



c Welke chemische regels zijn hieronder overtreden?



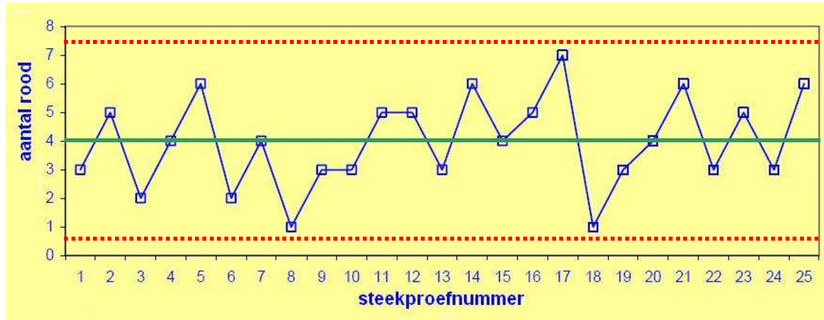
d Als we bij c de klinische regels hadden gehanteerd, waren de resultaten dan anders geweest?

EXTRA INFORMATIE

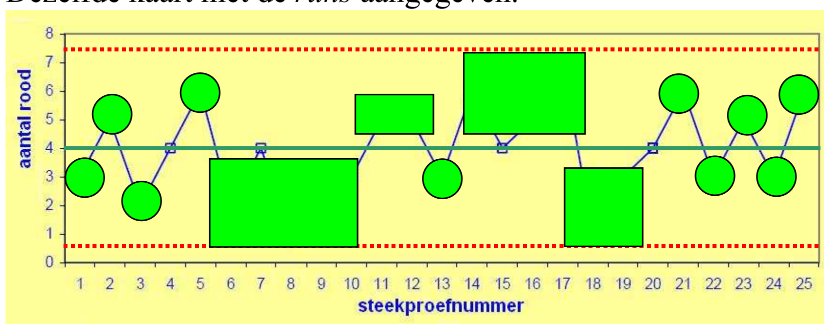
Opgave 7.9

Een kijk achteraf: de runchart

Een **runchart** is een kaart die gebruikt wordt om *achteraf* storingen te vinden waarop de meetserie misschien afgekeurd moet worden. De *runs* van de gemeten waarden worden daartoe aangegeven. Een **run** is dan een serie metingen die aan dezelfde kant van de centrale lijn liggen.
Als voorbeeld de rode ballenkaart.



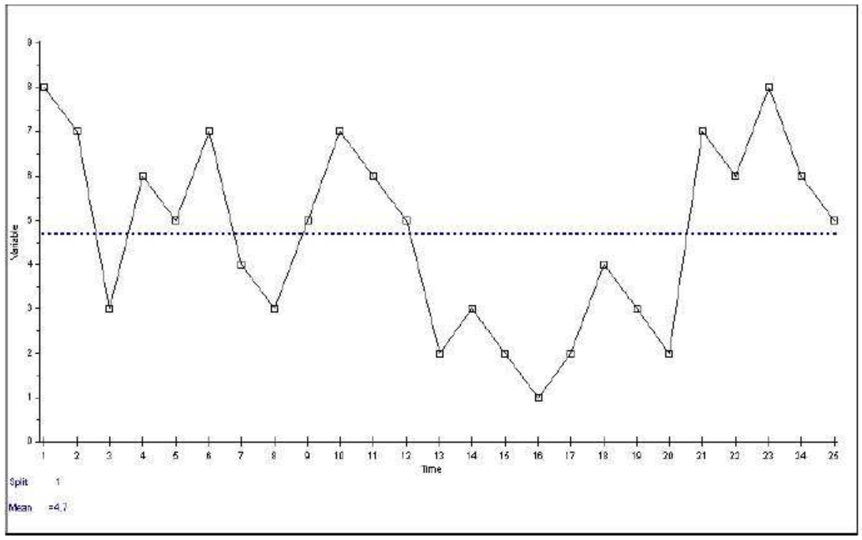
Dezelfde kaart met de *runs* aangegeven.



Informatie uit de kaart over de speciale invloeden halen we uit:

1. Het **aantal runs**: bij 25 meetwaarden mag dit tussen 9 en 17 liggen.
2. De **shift** (verschuiving): bij minder dan 20 bruikbare waarnemingen (die niet op de centrale lijn liggen) duidt een run van 7 of meer op afwijkingen. Bij meer dan 20 bruikbare waarnemingen duidt een run van 8 of meer op afwijkingen.
3. De **trend**: een serie stijgende of dalende waarnemingen. bij minder dan 20 bruikbare waarnemingen (die niet op de centrale lijn liggen) duidt een trend van 6 of meer op afwijkingen. Bij meer dan 20 bruikbare waarnemingen duidt een trend van 7 of meer op afwijkingen.

Onderzoek of er regels overtreden worden in de volgende runchart:



7.1

S1 Wat is het verschil tussen toevallige en aanwijsbare oorzaken van variaties in meetwaarden en uitslagen?

S2 Welke soorten grenzen zijn er bij het gebruik van controlekaarten? Hangt dit nog van de toepassing af?

S3 Maak een stappenplan voor het opstellen en invullen van een controlekaart.

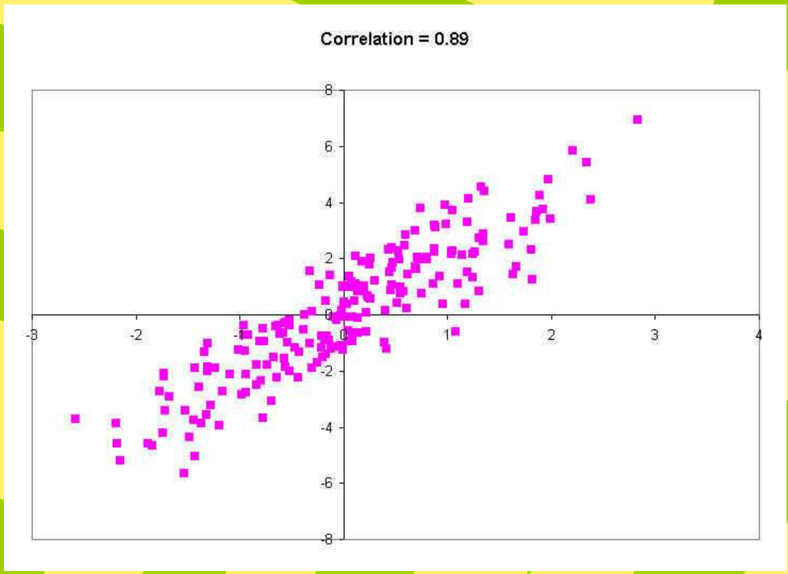
S4 Geef een overzicht van de Westgard regels en welke acties er eventueel ondernomen moeten worden.

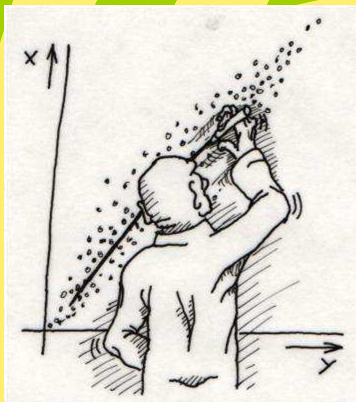
S5 Welke regels worden meestal gebruikt bij chemische, microbiologische en klinische analyses?

S5 Hoe maak je een runchart? Welke controleregels horen hierbij?

8 Correlatie en regressie

Verjaardag vieren is een gezonde bezigheid. Het is namelijk statistisch bewezen dat mensen, die het meest hun verjaardag vieren, ook het langst leven.
S. den Hartog





Interessant verschijnsel. Iedere keer als ik op dit knopje druk, slaakt de student een zucht van verlichting!

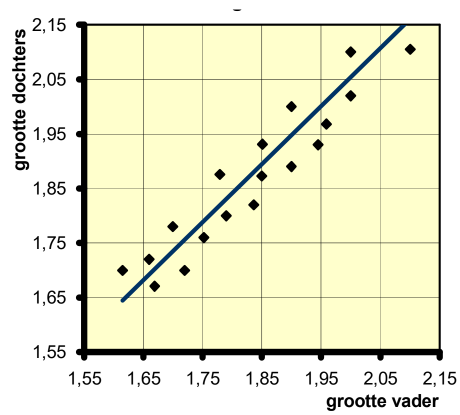
Correlatie

Zal er een relatie bestaan tussen de inkomsten van een gezin en de uitgaven? Zal er een verband bestaan tussen de temperatuur waarbij wasgoed gewassen wordt en het krimpen van de vezels?

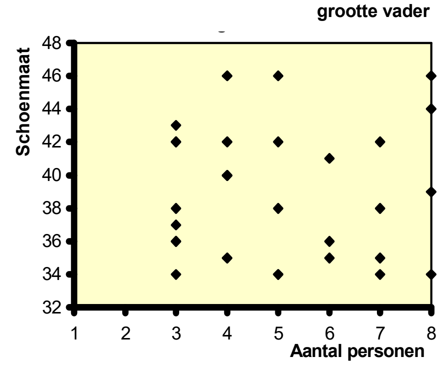
Opgave 8.1 **Wel of geen verband tussen de grootheden?**

Bekijk de volgende voorbeelden:

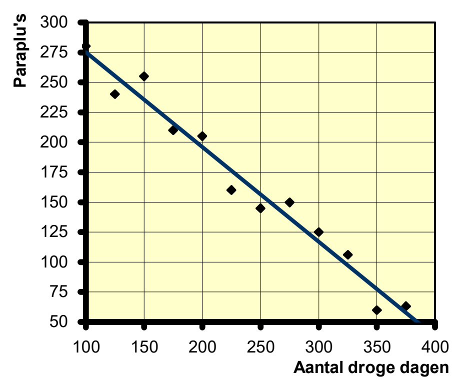
Hebben grote vaders ook grote zonen of grote dochters? Of is er helemaal geen verband?



Is er een verband tussen het aantal personen dat in een huis woont en de schoenmaat van de jongste bewoner?



Soms heb je ook een verband waarbij de ene grootheid groter wordt en de andere grootheid kleiner. Bijvoorbeeld: het aantal droge dagen (in een jaar) en het aantal verkochte paraplu's in een winkelketen.



a In twee gevallen is sprake van **correlatie** (afhankelijkheid) tussen de grootheden. Welke zijn dat?

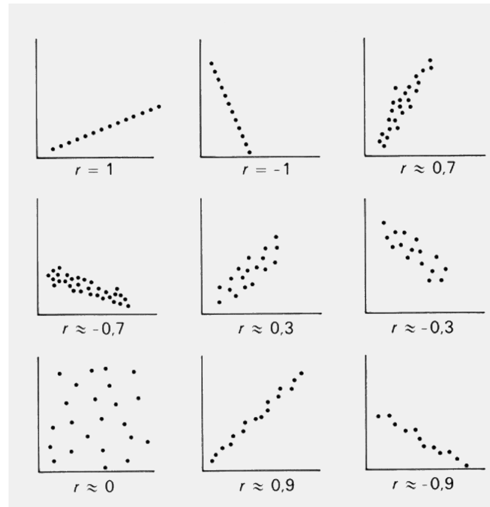
b Bij één van de twee is de **correlatie positief**, bij de andere is de **correlatie negatief**. Welke zijn dat volgens jou?

Correlatie kan in een getal worden uitgedrukt: de **correlatiecoëfficiënt** symbool r. Dat is een getal tussen –1 en +1.

c Geef in de drie voorbeelden (vorige pagina) aan wat voor de correlatiecoëfficiënt symbool r geldt:
$r = 0$
$r < 0$
$r > 0$

Een correlatiecoëfficiënt $r = 1$ of $r = -1$ betekent dat alle punten op een perfecte rechte lijn liggen. We noemen dat **volledige correlatie**.

Rechts zie je voorbeelden van correlatiecoëfficiënten.



Opgave 8.2 **Berekenen van de correlatiecoëfficiënt**

Uitrekenen van r kan met de volgende formule.

correlatiecoëfficiënt

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{(n-1) \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y}$$

Het getal wordt ook wel de **Pearson's correlatiecoëfficiënt** genoemd.

Een voorbeeld:
De maximum temperatuur (°C) hangt samen met het aantal uren zonneschijn op een dag:

Uren zon (x_i)	3	4	9	12	17
Temperatuur (y_i)	15	25	20	30	35

Opdracht: Bereken de correlatiecoëfficiënt.

Oplossing: Het is duidelijk dat we hier met een tabel moeten werken (zoals bij de standaarddeviatie):

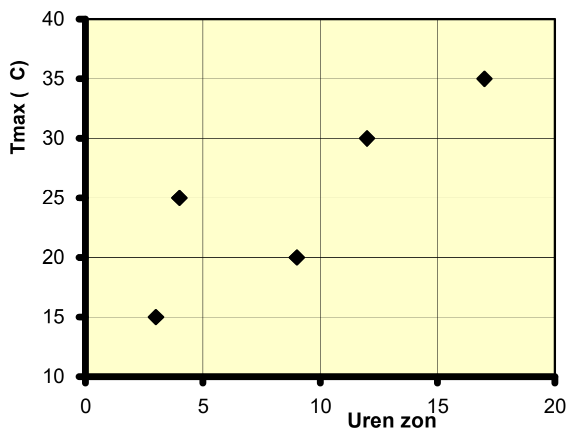
i	X_i	Y_i	$X_i - \overline{X}$	$Y_i - \overline{Y}$	$(X_i - \overline{X})\cdot(Y_i - \overline{Y})$
1	3	15	-6	-10	60
2	4	25	-5	0	0
3	9	20	0	-5	0
4	12	30	3	5	15
5	17	35	8	10	80

$n = 5$	$\sum x_i = 45$	$\sum y_i = 125$			$\sum (x_i - \overline{x})\cdot(y_i - \overline{y}) = 155$
	$\overline{x} = 9$	$\overline{y} = 25$			$\sigma_x = 5{,}79 \quad \sigma_y = 7{,}91$

De correlatiecoëfficiënt is dan:

$$r = \frac{155}{4 \times 5{,}79 \times 7{,}91} = 0{,}846$$

In de grafiek zien we hoe deze correlatie van 0,846 er uitziet.



Naast de correlatiecoëfficiënt r wordt ook r^2 gebruikt. Het getal r^2 wordt de **determinatiecoëfficiënt** genoemd. In voorgaand voorbeeld geldt: $r^2 = 0{,}846^2 = 0{,}723$. *Dit betekent dat de invloed op de maximale temperatuur voor 72,3 % toegeschreven kan worden aan het aantal uren zon.* De andere 27,7% die bijdragen aan T_{max} komen door andere factoren (ligging, vochtigheid, begroeiing).

Bereken nu zelf de correlatiecoëfficiënt en determinatiecoëfficiënt in de volgende onderzoeksvraag:
“Worden mensen die wat gezetter zijn, minder oud dan mensen met een laag gewicht?”

Om deze vraag te kunnen beantwoorden werd in 1980 een aantal mannen van 65 jaar oud met een lengte van 1.80 m in dit onderzoek betrokken (zie onderstaande tabel).

Gewicht (kg)	74	90	80	67,5	68	78	70	69,5	79	69
Leeftijd overlijden	72	68	70	85	82	69	77	74	71	82

a Teken een grafiek.

b Verwacht je (vooraf) een positieve of een negatieve correlatie? Waarom?

c Bereken de correlatiecoëfficiënt r in 3 decimalen nauwkeurig.

Of de relatie aantoonbaar is hangt af van de grootte van r.
Zie tabel:

n **= aantal waarnemingen**

grenswaarde

n	r_{grens}	n	r_{grens}	n	r_{grens}
3	0,997	11	0,602	19	0,456
4	0,950	12	0,576	20	0,444
5	0,878	13	0,553	25	0,396
6	0,811	14	0,532	30	0,361
7	0,754	15	0,514	40	0,312
8	0,707	16	0,497	50	0,279
9	0,666	17	0,482	100	0,196
10	0,632	18	0,468	1000	0,062

Een correlatie is aantoonbaar als de berekende r-waarde groter of gelijk is aan de tabelwaarde r_{grens}. Bij een negatieve correlatiecoëfficiënt nemen we de absolute waarde van de berekende r.
Ofwel: als $|r_{berekend}| \geq |r_{grens}|$ dan is de **correlatie aantoonbaar**.

de *absolute waarde* van r_{berekend} betekent dat je een eventueel minteken moet weglaten

d Is er een aantoonbare relatie? Zie tabel.

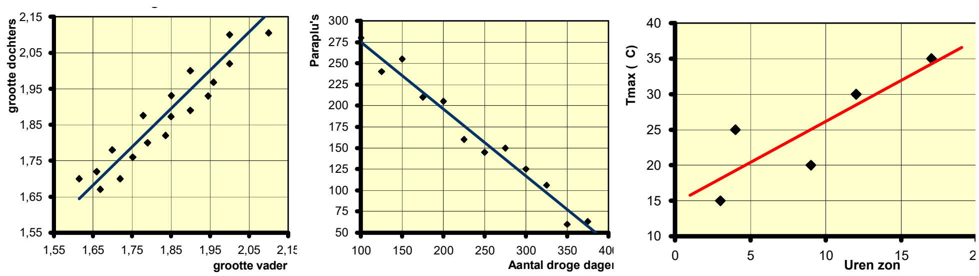
e Bereken de determinatiecoëfficiënt r^2.

f Voor hoeveel procent is de leeftijd van overlijden toe te schrijven aan het gewicht van een persoon?

g Was de correlatie bij de opgave met de temperatuur en de zoneschijn aantoonbaar?

Opgave 8.3 **Bepalen van een lineaire regressielijn**

In de onderstaande voorbeelden is steeds een *gemiddelde* lijn door de meetpunten getrokken.



Je kunt door opmeten de vergelijking van de grafiek $y = a{\cdot}x + b$ bepalen. Je kunt hem ook uitrekenen met behulp van de correlatiecoëfficiënt r, de gemiddelde waarden $\overline{x}$ en $\overline{y}$ en de standaarddeviaties σ_x en σ_y.

lineaire regressielijn

$$\boxed{a = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}} \quad \text{en} \quad \boxed{b = \overline{y} - a \cdot \overline{x}}$$

13

Het voorbeeld uit **Opgave 8.2** van de temperatuur en de uren zon wordt dan als volgt verder uitgewerkt:

$$a = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = 0{,}846 \times \frac{7{,}91}{5{,}79} = 1{,}16$$

$$b = \overline{y} - a \cdot \overline{x} = 25 - 1{,}16 \times 9 = 14{,}56$$

De vergelijking van de regressielijn is dus: $y = 1{,}16\,x + 14{,}56$

Bepaal nu zelf de vergelijking van de regressielijn uit **Opgave 8.2** van het verband tussen gewicht en leeftijd van overlijden.

Opgave 8.4 **Oefenen met lineaire regressie uitwerking**

Zes mensen hebben deelgenomen aan een dieet om af te vallen. In de tabel staan het aantal volgehouden dagen en het gewichtsverlies in kg.

x	30	41	16	32	54	43
y	1,32	2,04	0,82	1,63	3,08	2,13

a Teken een grafiek, bekijk of er sprake is van aantoonbare correlatie en bepaal de vergelijking van de lineaire regressielijn.

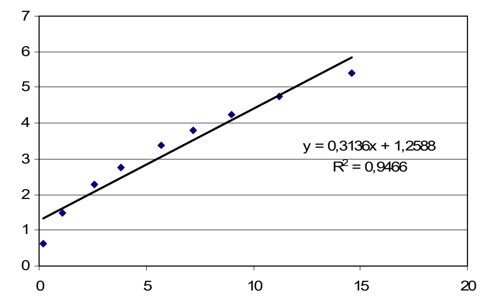
b Bereken hoe lang het dieet volgehouden moet worden om 10 kg kwijt te raken.

c Waarom is dit niet met zekerheid te zeggen?

8.1

R1 Uit de tabel met de grenswaarde van r is af te leiden dat bij een kleine steekproef de relatie pas aantoonbaar is als er een heel sterke correlatie tussen de twee grootheden wordt gevonden. Bedenk een verklaring waarom dat zo is.

R2 Het is zinnig om altijd een grafiek te tekenen wanneer correlatie wordt onderzocht. Leg uit aan de hand van de grafiek rechts waarom dat zo is.



R3 Welk soort verband zou hier waarschijnlijk beter passen?

R4 Correlatie is niet hetzelfde als oorzaak en gevolg. Er is bijvoorbeeld een verband tussen het aantal kerken in steden en dorpen en het aantal gepleegde misdaden. Is de een hier de oorzaak van de ander? Of omgekeerd?

R5 Welke derde factor zou hier wel van allebei de oorzaak kunnen zijn?

R6 Er is een verband gevonden tussen verhoogde agressiviteit bij kinderen en het aantal uren dat ze naar TV kijken. Is daarmee bewezen dat kinderen agressief worden van het televisiekijken? Formuleer een omgekeerde verklaring. Is er nog een derde factor te bedenken?

R7 Formuleer het verschil tussen een statistisch verband en een oorzakelijk verband.

Opgave 8.5

Lineaire regressie met Casio *fx-82SX*

De correlatiecoëfficiënt, het hellingsgetal en de asafsnijding kunnen ook met de bekendste ZRM de Casio *fx-82SX* worden berekend.
Volg dit stappenplan:

- kies MODE 3 REG (regressie)
- kies 1 Lin (lineair)
- de M+ is nu weer datatoets DT
- voer de meetwaarden in volgens: <x-data> **,** <y-data> DT
- via SHIFT-2 (de S-VAR toets) kunnen de regressiewaarden worden opgevraagd:

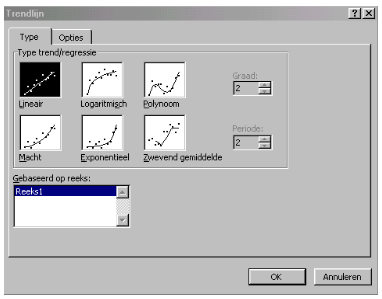
- SHIFT SVAR → → 1 geeft A de asafsnijding
- SHIFT SVAR → → 2 geeft B het hellingsgetal
- SHIFT SVAR → → 3 geeft r de correlatiecoëfficiënt

Let op: de Casio gebruikt de Amerikaanse notatie: *y* = A + B*x*, precies andersom dan de Europese *y* = b + a*x*

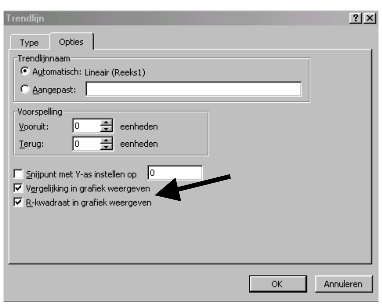
Oefen dit met een eigen setje meetwaarden of de waarden uit opgave 8.4.

Opgave 8.6

Lineaire regressie met Excel
Als je alle gegevens al in Excel hebt ingevoerd en in een grafiek hebt staan, kun je ook Excel de lineaire regressielijn laten uitrekenen.
Let op: je moet wel het goede grafiektype hebben gebruikt, namelijk *spreiding* (Eng: scatter)



Klik, nadat de grafiek in je werkblad is opgenomen, met de linker muisknop op een willekeurig meetpunt in de grafiek zodat alle punten ‘oplichten’; druk dan op je rechter muisknop. Je krijgt nu een snelmenu. Kies daarin voor de optie ‘*Trendlijn toevoegen...*’. Nevenstaand scherm wordt dan afgebeeld. Zoals je ziet, kun je kiezen uit verschillende regressielijnen. Kies voor *lineair*.



Door het tabblad ‘*Opties*’ te activeren, krijg je nevenstaand scherm waarin je door aanvinken kunt aangeven of je de vergelijking van de regressielijn (= trendlijn) in de grafiek wilt weergeven. Dit geldt ook voor r^2 (determinatiecoëfficiënt).
Met de optie ‘*Voorspelling*’ kun je de regressielijn *extrapoleren* (naar links en/of rechts verlengen).
Gewoon proberen!

In een productieafdeling van een fabriek is het niveau van de dagproductie sterk afhankelijk van de vraag. Indien er (toevallig) veel orders binnenkomen, dan moet er onder druk een hoge productie gehaald worden. Het percentage afgekeurde producten lijkt samen te hangen met het niveau van de dagproductie.
Voor 9 achtereenvolgende dagen werden de dagproductie en het percentage afgekeurde producten geregistreerd, zie tabel.

Dag	productie/dag	% afgekeurd
1	2800	2,0
2	3800	3,2
3	4400	4,2
4	3200	2,4
5	2400	1,4
6	2700	1,7
7	3500	2,8
8	4200	3,6
9	3600	3,0

a Bepaal m.b.v. Excel de vergelijking van de regressielijn, de determinatiecoëfficiënt r^2 en de correlatiecoëfficiënt r.

b Is er aantoonbare correlatie tussen productie en afkeur?

Als je grafiek doortrekt (extrapoleert) naar beneden dan lijkt het of er bij 1300/dag het percentage afkeur nul wordt.

c Is dit waarschijnlijk? Leg uit.

8.1

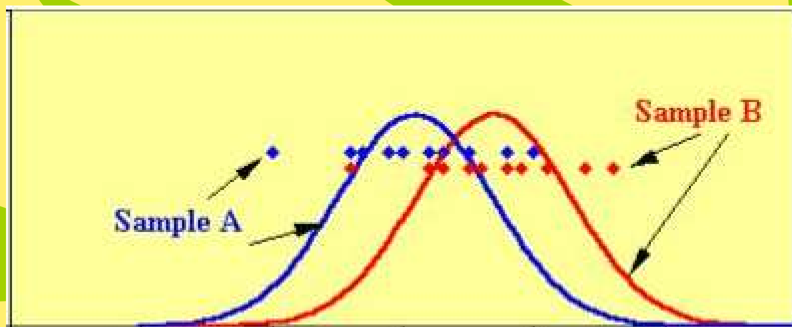
S1 Verklaar de begrippen correlatie en regressie.

S2 Waarom betekent correlatie niet ook oorzaak en gevolg?

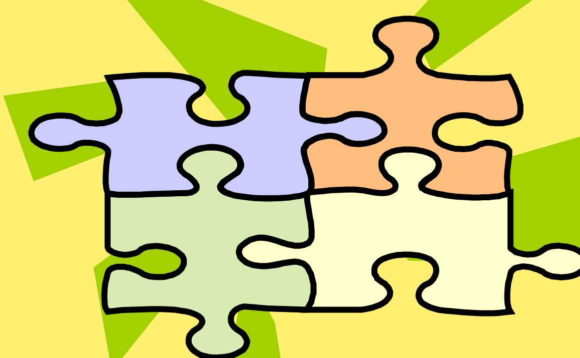
S3 Maak een stappenplan voor het berekenen van de correlatiecoëfficiënt en van de vergelijking van de regressielijn

S4 Wat betekent een determinatiecoëfficiënt van bijvoorbeeld 0,85?

9 Testen van meetresultaten



ik denk dat wij de controlegroep zijn!



Betrouwbaarheid testen
Bij uitslagen van metingen wordt verwacht dat we ook een uitspraak kunnen doen over de betrouwbaarheid ervan (kwaliteit leveren). Zoals je gezien hebt kan dat met behulp van betrouwbaarheidsintervallen. Kijk naar het volgende voorbeeld:

Suikergehalte van cola
Cola bevat volgens de fabrikant maximaal 105 g suiker per liter. Om dit te controleren wordt een steekproef genomen van 10 monsters. Het resultaat is een gemiddelde waarde van 101 g en een standaarddeviatie van 4 g.
Het lijkt er dus op dat er minder dan 105 g suiker in zit, maar we hebben wel een standaarddeviatie van 4 g.

Om een uitspraak te kunnen doen berekenen we het 95 % betrouwbaarheidsinterval.

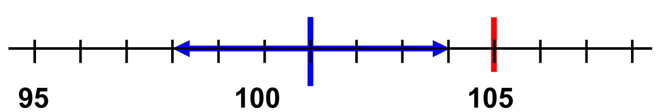
$v = n - 1 = 10 - 1 = 9$ en dus vinden we in de tabel $t = 2{,}26$

$$\bar{x} - 2{,}26 \times \frac{4}{\sqrt{10}} < \mu < \bar{x} + 2{,}26 \times \frac{4}{\sqrt{10}}$$

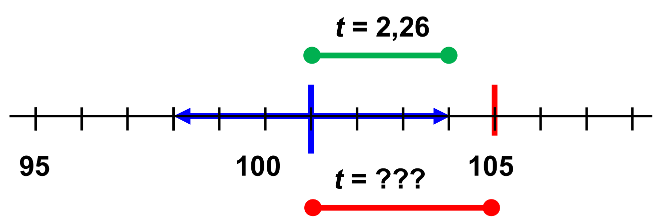
$$101 - 2{,}86 < \mu < 101 + 2{,}86$$

BI: 98 g < suikergehalte < 104 g

Met een betrouwbaarheid van 95 % kunnen we zeggen dat de cola niet significant meer suiker bevat dan 105 g/L. Op een getallenlijn:



We kunnen dit ook sneller bewijzen door de procedure om te draaien en de *t*-waarde te berekenen die bij 105 hoort en die te vergelijken met de kritische waarde van 2,26.



We bouwen dan de formule $\bar{x} \pm t \cdot \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}$ om tot: $t = \left|(\mu - \bar{x})\right| \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sigma_{\text{n-1}}}$

modulus strepen: uitkomst > 0

Hiermee rekenen we de testwaarde van t uit:

$$t_{\text{test}} = \left|(\mu - \bar{x})\right| \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sigma_{\text{n-1}}} = |105 - 101| \times \frac{\sqrt{10}}{4} = 3{,}16$$

$t_{\text{test}} > t_{\text{kritisch}}$ want 3,16 > 2,26, dus 105 valt buiten het BI. De cola bevat niet significant meer suiker dan 105 g/L.

Men noemt zo'n berekening het uitvoeren van een **betrouwbaarheidstest** (of **significantietest**).

betrouwbaarheidstest of significantietest

Met een betrouwbaarheidstest onderzoek je of een afwijkende uitslag toeval is of dat er werkelijk iets aan de hand is (zie ook hoofdstuk 7 over controlekaarten).

Om dit statistisch en wetenschappelijk correct te doen moet je je houden aan een stappenplan ofwel een vast protocol.
Hierbij kijk je *eerst* wat je zou verwachten, vervolgens doe je een experiment en kijk je met een test of het resultaat significant (opmerkelijk) afwijkt van je verwachting.

wetenschappelijk onderzoek

1. De onderzoeksvraag of **hypothese** formuleren: wat wil je precies onderzoeken?
2. Onderzoek opzetten, uitvoeren en verwerken.
3. Testwaarde berekenen.
4. Testwaarde vergelijken met kritische waarde.
5. Hypothese aannemen of verwerpen.
6. Conclusie trekken.

We bepreken de t-test (in drie toepassingen) en de F-test. Deze testen gaan ervan uit dat we met een normaalverdeling te doen hebben. Al deze testen verlopen op eenzelfde manier:

algemeen stappenplan voor betrouwbaarheidstest

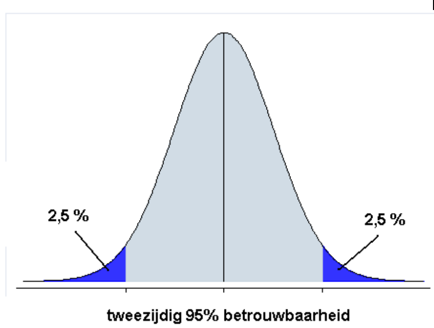
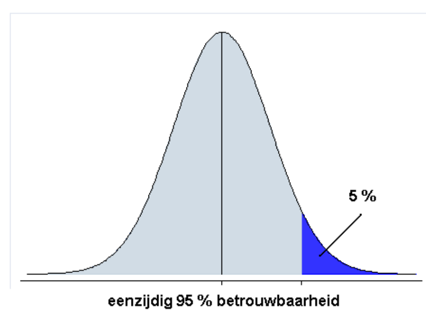
1 Een hypothese stellen: je doet een uitspraak waarvan je de juistheid wilt onderzoeken en noemt deze de nulhypothese H_0. De hypothese stel je eerst in woorden en dan in wiskundige notatie. De hypothese zal dus moeten aangeven welke concrete resultaten, dus *getallen* je uit het onderzoek wilt halen. *Men neemt altijd als nulhypothese dat er **geen** significant verschil is.*

2 Je stelt de alternatieve hypothese H_1 op. Die hypothese hangt af van wat je verwacht of wilt aantonen of bewijzen.

3 Beslis of je eenzijdig of tweezijdig wilt toetsen. Dit wordt hieronder uitgelegd.

4 Je geeft aan welke testwaarde (of toetswaarde) je gebruikt en berekent deze. Vaak is dit de *t* – waarde, maar ook de *F* – waarde en de χ^2 – waarde worden gebruikt.
5 Je kiest de mate van betrouwbaarheid: bijv. 90 %, 95 % of 99 %.
6 Je zoekt de kritische waarde op die bij deze situatie en test-waarde hoort en vergelijkt die met de testwaarde. Als de testwaarde ***hoger*** is dan de kritische waarde wordt de nulhypothese verworpen.
7 Als H_0 verworpen wordt moet H_1 juist zijn.
8 Je trekt een conclusie in woorden.

In de meeste gevallen zullen we **tweezijdig** toetsen.
De beslissing om **eenzijdig** of tweezijdig te toetsen hangt af van de manier waarop de nulhypothese is geformuleerd. Bekijk het volgende voorbeeld.

<table>
<tr><th colspan="2">Eenzijdig of tweezijdig toetsen</th></tr>
<tr><td colspan="2">Voorbeeld: in een lucifersdoosje zitten volgens de fabrikant 50 lucifers. De nulhypothese zal zijn: het aantal lucifers in een doosje verschilt niet significant van 50 ofwel $\mu = 50$.</td></tr>
<tr><td>Je stelt
H_0: $\mu = 50$
alternatief
H_1: $\mu \neq 50$
als je niet weet of er meer dan 50 of minder dan 50 inzitten.
In dit geval toets je tweezijdig.</td><td>Je stelt kunt ook stellen
H_0: $\mu = 50$
alternatief
H_1: $\mu > 50$
als je vermoedt dat er meer dan 50 inzitten.
In dit geval toets je eenzijdig.</td></tr>
<tr><td>Tweezijdig toetsen</td><td>Eenzijdig toetsen</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>het donkere gebied wordt verworpen</td><td>het donkere gebied wordt verworpen</td></tr>
</table>

Let op!

Veel statistici en wetenschappers pleiten ervoor om ***altijd tweezijdig*** te toetsen. Je mag wel hopen er een verschil in bepaalde richting is, maar dat mag je niet zo maar aannemen. Als een je medicijn test dat de bloeddruk moet verlagen zou het zomaar kunnen dat het de bloeddruk verhoogt (bijv. op langere termijn).

9.1

R1 Hoe zou de tekening van de eenzijdige toets eruit zien als we als alternatieve hypothese gesteld hadden: H_1: $\mu < 50$?

R2 Als we het voorbeeld van de cola eenzijdig hadden getest, was de uitslag dan anders geweest? Leg uit, eventueel met een berekening.

R3 Waarom is de volgende hypothese niet concreet genoeg:

Opgave 9.1

Testen van het uit de steekproef geschatte gemiddelde t.o.v. μ

Je gebruikt deze test in een lab bijvoorbeeld:

- als je iets wil vergelijken met een bekende of gewenste waarde;
- om de juistheid van een analysetechniek te beoordelen.

Hier nemen we als voorbeeld een zak cement waar 25 kg op staat. Bij kwaliteitscontrole in de fabriek wordt een steekproef genomen:

Gewicht van zakken cement (kg)				
23,5	24,8	23,9	25,8	24,6

a Bereken het gemiddelde en de standaarddeviatie.

Voldoet de fabrikant hiermee aan de specificatie? Op het eerste gezicht lijkt dit van niet. Maar het kan *toeval* zijn dat er vier waarden onder 25 kg liggen. Bij herhaling van de steekproef zouden dan best alle 5 waarden boven de 25 kg kunnen liggen. Een test zal dit moeten uitwijzen. We volgen het stappenplan.

t- test van het uit de steekproef geschatte gemiddelde t.o.v. μ

1 De nulhypothese stellen:
H_0: “het gemiddeld gewicht verschilt **niet significant** van 25”
(dit is beter dan: “het gewicht voldoet aan de specificatie”)
H_0: $\mu = 25$

2 Alternatieve hypothese
H_1: “het gemiddeld gewicht verschilt **significant** van 25”
H_1: $\mu \neq 25$ (geen voorkeur voor groter of kleiner).

3 Dus tweezijdig testen.

4 De testwaarde is: $t = \left|(\mu - \bar{x})\right| \cdot \dfrac{\sqrt{n}}{\sigma_{n-1}}$

modulus strepen: uitkomst > 0

b Bereken deze t–waarde.

5 We willen een betrouwbaarheid van 95 %.

c Wat betekent dat bij tweezijdig toetsen? Hoeveel % links en rechts?

6 Zoek de kritische waarde op en vergelijk die met de testwaarde.

d Hoeveel vrijheidsgraden zijn er? Zoek de kritische waarde t_{kritisch} op in de t–tabel.

e Vergelijk die met de testwaarde: is $t_{\text{berekend}} > t_{\text{kritisch}}$?
Zo **ja**, dan wordt de nulhypothese **aangenomen**.
Zo **nee**, dan is hij **verworpen** en moet de alternatieve hypothese dus waar zijn.

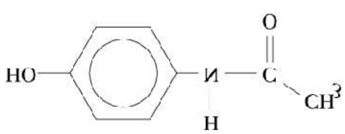
f Wordt de nulhypothese verworpen?

7 Conclusie trekken.

14

g Welke conclusie kunnen we trekken uit de test? In woorden graag!!

Opgave 9.2



Paracetamol

Een tablet paracetamol bevat 200 mg werkzame stof. Om dit te controleren ga je een steekproef doen en het gemiddelde gehalte paracetamol bepalen.

a Stel nu eerst een nulhypothese en een alternatieve hypothese op.

b Ga je eenzijdig of tweezijdig toetsen

Je neemt een steekproef van 6 tabletten en bepaalt het gehalte.
De uitslag is:
$\bar{x} = 192$ mg
$\sigma_{n-1} = 4$ mg

c Bepaal of de steekproef met 95 % betrouwbaarheid valt binnen de specificaties. Volg het stappenplan.

9.1

Voor controle kun je gebruik maken van de website
http://www.graphpad.com/quickcalcs/OneSampleT2.cfm
Deze geeft de uitslag van een tweezijdige toets met 95 % betrouwbaarheid.

b Als je vermoedde dat er te weinig werkzame stof in de tabletten zou zitten, had je misschien een eenzijdige test uitgevoerd. Welk verschil had gemaakt?

Opgave 9.3

Nieuwe machine

Een machine produceert 250 onderdelen per dag. Een nieuw aangeschafte machine zou *sneller* moeten werken. Je gaat het gemiddelde aantal onderdelen over een aantal dagen bepalen.

a Stel nu eerst een nulhypothese en een alternatieve hypothese op.

b Ga je eenzijdig of tweezijdig toetsen?

Vervolgens worden de metingen uitgevoerd.
Een steekproef van 10 metingen geeft: $\bar{x} = 265$ en $\sigma_{n-1} = 6$

c Voer de test uit en bepaal zo met 95 % betrouwbaarheid of de nieuwe machine inderdaad significant sneller is.

d Als je tweezijdig getest had was de conclusie dan gelijk geweest?

Opgave 9.4

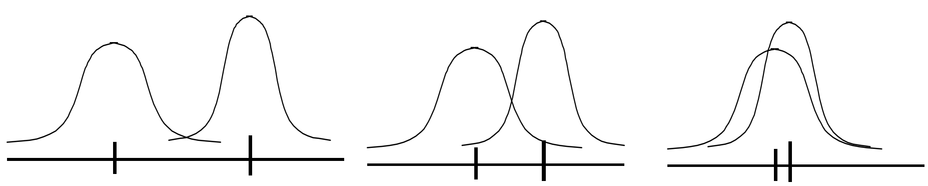
Slootwater

Jij en je partner moeten onafhankelijk van elkaar voor hetzelfde monster het loodgehalte bepalen. Het gaat hier om het loodgehalte in slootwater.
De resultaten zijn:

Loodgehalte in slootwater (mg/L)			
	n	$\overline{X}$	σ_{n-1}
Jij	12	0,38	0,02
Partner	8	0,44	0,01

We gaan uit van een normale verdeling.

a Welk van plaatjes I, II of III past dan het beste?



I **II** **III**

b Heb je een voorkeur voor een van de meetseries?

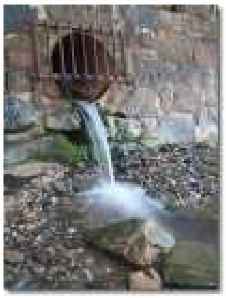
Het "werkelijke" gehalte blijkt 0,40 mg/L te zijn (bepaald met een zeer nauwkeurige en betrouwbare methode).

c Voer de (95 %) *t*–test uit voor beide meetseries.

d Conclusie?

Het vergelijken van twee meetseries kan beter met een speciale t-test.

Opgave 9.5

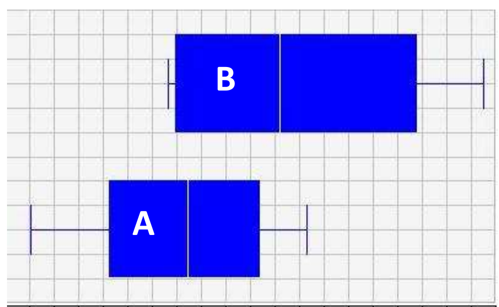


Vergelijken van twee meetseries

We twee willen steekproeven uit een normaal verdeelde populatie vergelijken.
Er is onderzoek gedaan naar het kopergehalte van afvalwater uit een fabriek volgens twee verschillende meetmethodes: A en B. Hetzelfde monster is per methode 11 maal gemeten.
De uitslagen zijn:

Kopergehalte in afvalwater (μg/L)											
A	4,3	5,1	5,8	3,5	4,7	6,0	4,7	6,5	3,7	3,4	2,3
B	6,1	4,6	4,5	7,2	8,9	7,3	8,2	5,0	4,4	9,2	4,4

Er wordt een boxplot gemaakt met deze twee meetseries:



Durf je zo te zeggen of er een significant (opvallend verschil) is tussen de twee meetmethodes?
Om deze vraag goed te kunnen beantwoorden is een test beschikbaar, in dit geval ook een *t*–test.

Opgave 9.6

***T*-test van gemiddelde uit twee steekproeven**

Deze test wordt onder andere gebruikt bij het vergelijken:

- van twee meetmethodes;
- van twee behandelingsmethodes;
- van twee verschillende medicijnen

Als voorbeeld bekijken we twee onderzoeken naar het geboortegewicht van baby's. Eén groep vrouwen is speciaal begeleid op het gebied van leefwijze en voedingspatronen, de ander groep (**controlegroep** genoemd) niet.
Uit de ziekenhuisgegevens blijkt:

	Behandeld	Controle
Gemiddeld gewicht (g)	3100	2750
Standaarddeviatie (g)	420	425
Aantal	75	75

De vraag is: is er een significant verschil tussen de groepen? Dus heeft de extra begeleiding zin gehad? Er is nauwelijks verschil tussen de standaarddeviaties. We richten ons op het gemiddelde.

t- test van gemiddelden uit twee steekproeven

1 De nulhypothese stellen.
H_0: Er is geen significant verschil tussen de gemiddelden van de behandelde groep en de controlegroep.
H_0: $|\mu_1 - \mu_2| = 0$ of $\mu_1 = \mu_2$
2 Alternatieve hypothese
H_1: Er is een significant verschil tussen de gemiddelden van de behandelde groep en de controlegroep.
H_1: $|\mu_1 - \mu_2| \neq 0$ of $\mu_1 \neq \mu_2$ (geen voorkeur voor een van beide methoden).

3 Dus tweezijdig testen.

4 De testwaarde is: $t = \dfrac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{S \cdot \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$

S is de **gecombineerde standaarddeviatie**. Omdat er nu twee series zijn met twee standaarddeviaties zijn, moeten we ze combineren.

Je berekent deze met: $S = \sqrt{\dfrac{v_1 \cdot \sigma_1^{\,2} + v_2 \cdot \sigma_2^{\,2}}{v_1 + v_2}}$

σ van de steekproef

***v* = *n* – 1**

voor het aantal vrijheidsgraden geldt:
$v_{TOTAAL} = n_1 + n_2 - 2$

Controle: de gevonden waarde moet natuurlijk tussen de twee oorspronkelijke standaarddeviaties in liggen!

Ook de aantallen meetwaarden worden op een speciale manier gecombineerd, zoals blijkt uit de formule.

a Bereken *S*.

b Bereken de *t*-waarde

5 We willen een betrouwbaarheid van 95 %.

c Zoek de kritische waarde op via v_{TOTAAL} en vergelijk die met de testwaarde. Is $t_{berekend} > t_{kritisch}$? Wordt de nulhypothese verworpen?

d Welke conclusie kunnen we trekken uit de test?

16

Opgave 9.7

gasdichtheidsmeter

F-test van standaarddeviaties uit twee steekproeven

Om te testen of er verschil in precisie (nauwkeurigheid) is tussen twee methoden is de F–test ontwikkeld.
Een voorbeeld. Twee methoden om de dichtheid van een gas te bepalen hebben opgeleverd:

Dichtheid ρ (kg/m^3)		
	methode 1	methode 2
n	7	9
$\overline{x}$	1,45	1,50
σ_{n-1}	0,40	0,25

t- test van standaarddeviaties uit twee steekproeven

F-test van uit twee steekproeven

1 De nulhypothese stellen.
H$_0$:De precisie van methode 1 verschilt ***niet*** significant van de precisie van methode 2
H$_0$: $\sigma_1 = \sigma_2$

hier is natuurlijk wel σ_{n-1} bedoeld

2 Alternatieve hypothese
Eerste manier
H$_1$: de precisie van methode 1 is significant lager dan de precisie van methode 2
H$_1$: $\sigma_1 < \sigma_2$
Of voor de zekerheid:
Tweede manier
H$_1$: de precisie van methode 1 verschilt significant van de precisie van methode 2
H$_1$: $\sigma_1 \neq \sigma_2$

3 Dus ***eenzijdig*** testen bij manier 1 en tweezijdig bij manier 2.

4 De testwaarde is: $F = \dfrac{\sigma_A^{\,2}}{\sigma_B^{\,2}}$
met σ_A de grootste standaarddeviatie
met σ_B de kleinste standaarddeviatie
(zo zorg je ervoor dat $F > 1$)

a Bereken de F-waarde

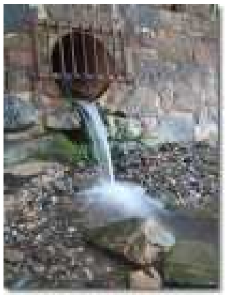
5 We willen een betrouwbaarheid van 95 %.

b Zoek de kritische waarde op (tabel 4) en vergelijk die met de testwaarde: is $F_{\text{berekend}} > F_{\text{kritisch}}$? Wordt de nulhypothese aangenomen?

c Welke conclusie kunnen we trekken uit de test? Is er een significant verschil in precisie?

16

Opgave 9.8



Afvalwateronderzoek

Met de gereedschappen t–test en F–test kunnen we nu wel een goede uitspraak doen over de methoden voor het onderzoek van koper in afvalwater.

Kopergehalte in afvalwater (μg/L)											
A	4,3	5,1	5,8	3,5	4,7	6,0	4,7	6,5	3,7	3,4	2,3
B	6,1	4,6	4,5	7,2	8,9	7,3	8,2	5,0	4,4	9,2	4,4

Vergelijk de twee methoden wat betreft gemiddelde en standaard-deviatie. Neem 95 % betrouwbaarheid.

Opgave 9.9

***T*-test van gemiddelde uit twee steekproeven met gepaarde waarnemingen**

In de vorige problemen was er geen relatie tussen de waarden van de twee meetseries. Als dat wel het geval is wordt de t–test een stuk eenvoudiger. Je gaat dan steeds de onderlinge verschillen vergelijken. Daarna bereken je het gemiddelde verschil $\bar{x}_v$ en de standaarddeviatie σ_v van dit gemiddelde. In het ideale geval zou het verschil nul moeten zijn.

Bij 10 proefpersonen is de reactietijd onderzocht op zowel een visueel signaal als een geluidssignaal. De waarnemingen horen nu *twee aan twee bij elkaar* (**gepaarde waarnemingen**).

Reactietijd (ms)			
nummer	**visueel**	**geluid**	**verschil**
1	420	380	40
2	235	230	5
3	280	300	-20
4	360	260	100
5	305	295	10
6	215	190	25
7	200	200	0
8	460	410	50
9	345	330	15
10	375	380	-5
gemiddeld	319,5	297,5	
gemiddeld verschil		$\bar{x}_v$	**22**
standaardafwijking verschil		σ_v	**34,4**

De vraag is: is er een significant verschil tussen de twee reactietijden? Om dat te weten moeten we eerst de verschillen berekenen. Deze waarden staan al in de tabel. Op het eerste gezicht lijken de proefpersonen sneller te reageren op geluid. Maar zoals inmiddels bekend, het zou ook toeval kunnen zijn.

De waarden die we bekijken zijn het gemiddelde verschil $\overline{x}_v$ en de standaarddeviatie van het verschil σ_v.

a Op welk signaal wordt gemiddeld het snelst gereageerd?

b Is het verschil tussen de twee gemiddelde waarden altijd gelijk aan het gemiddelde verschil? Controleer dit.

c Als de twee methoden niet verschillen, hoe groot zou dan het gemiddelde verschil $\overline{x}_v$ moeten zijn?

t- test van gemiddelde uit twee steekproeven met gepaarde waarnemingen

1 De nulhypothese stellen.
H$_0$: Er is geen significant verschil tussen de gemiddelde reactietijden
H$_0$: $\mu_v = 0$

2 Alternatief
H$_1$: Er is wel een significant verschil tussen de gemiddelde reactietijden
H$_1$: $\overline{\mu}_v \neq 0$ (geen voorkeur voor een van beide methoden).

3 Dus tweezijdig testen.

4 De testwaarde is: $t = \dfrac{\left|\overline{x}_v\right| \cdot \sqrt{n}}{\sigma_v}$

d Bereken de *t*–waarde

5 We willen een betrouwbaarheid van 95 %.

e Zoek de kritische waarde op. Wordt de nulhypothese aangenomen?

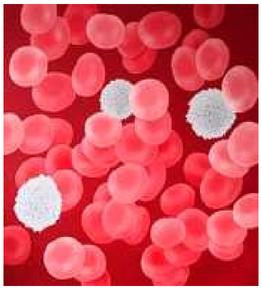
f Welke conclusie kunnen we trekken uit de test?

17

9.2

Test je eigen reactietijd:
http://www.bbc.co.uk/science/humanbody/sleep/sheep/reaction_version5.swf

Opgave 9.10



rode bloedcellen met hemoglobine

Hemoglobinegehalte
Hemoglobine in rode bloedcellen vervoert zuurstof van de longen naar de cellen. Van 6 patiënten is het Hb-gehalte (hemoglobine) bepaald met twee verschillende meetmethoden.

Hb-gehalte (g/dL)		
patiënt	methode A	methode B
1	12,5	13,2
2	13,6	14,1
3	16,3	16,8
4	15,8	15,2
5	14,6	15,3
6	11,3	10,9

Onderzoek of er (met 95 % betrouwbaarheid) een significant verschil is in het gemiddelde tussen methode A en methode B. Er is geen voorkeur voor een van beide methoden. Volg het stappenplan. Stel dus eerst een nulhypothese en alternatieve hypothese op.

Opgave 9.11

Opstellen van hypotheses
Een van de lastigste zaken bij onderzoek is het opstellen van een nulhypothese en het kiezen van de juiste test.
We zullen daarmee wat oefenen.
Beantwoord voor iedere casus de volgende vragen

a Wat zal hij moeten onderzoeken?
b Stel een goede nulhypothese en alternatieve hypothese op, zowel in woorden als in wiskundige symbolen.
c Kies je voor een- of tweezijdig toetsen? Leg uit.
d Welke test zou je gaan uitvoeren en waarom?

CASUS 1
Het maximaal gehalte lood in zuigelingenvoeding is 0,02 mg/kg vers gewicht. Een onderzoeker wil een partij kindervoeding testen.

CASUS 2
Iemand wil weten of methode B voor het bepalen van de concentratie arseen in een bodemmonster een betere precisie heeft dan methode A.

CASUS 3
Een onderzoeker wil weten of een bloeddrukverlagend medicijn inderdaad significant de bloeddruk verlaagt. Hij gaat 10 vergelijkbare patiënten 3 maanden lang onderzoeken.

CASUS 4
Twee analisten houden een wedstrijd wie het nauwkeurigst het gehalte van het bestrijdingsmiddel lindaan in vislever kan meten. Ze gaan ieder 5 keer *hetzelfde monster* onderzoeken.

Samenvatting van de vier behandelde testen

***t*-test voor het uit de steekproef geschatte gemiddelde t.o.v. μ**

$$t = \left| (\mu - \bar{x}) \right| \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sigma_{\text{n-1}}}$$

***t*-test van gemiddelde uit twee steekproeven met verschillende standaarddeviaties**

$$t = \frac{\left| \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \right|}{S \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \quad \text{met} \quad S = \sqrt{\frac{v_1 \cdot \sigma_1{}^2 + v_2 \cdot \sigma_2{}^2}{v_1 + v_2}}$$

***t*-test van gemiddelde uit twee steekproeven met gepaarde waarnemingen**

$$t = \frac{\left| \bar{x}_v \right| \cdot \sqrt{n}}{\sigma_v}$$

***F*-test van standaarddeviaties uit twee steekproeven**

$$F = \frac{\sigma_{\text{A}}{}^2}{\sigma_{\text{B}}{}^2}$$ met σ_{A} de grootste van de twee standaarddeviaties

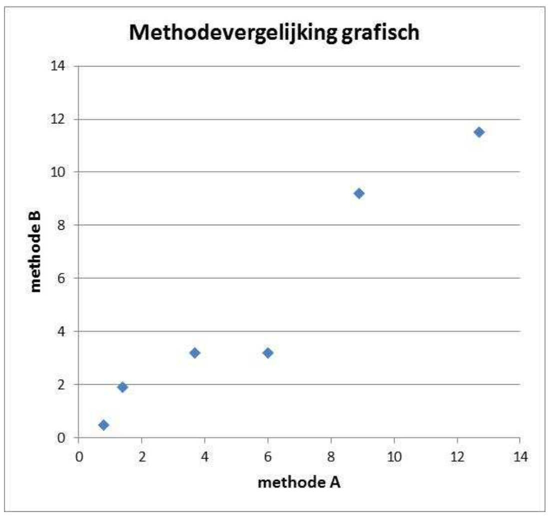
Opgave 9.12 **Grafische vergelijking van meetmethoden**

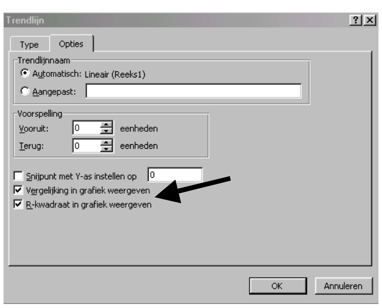
In de klinische chemie wordt een nieuwe meetmethode vaak vergelijken met een bekende beproefde methode. Een grafische benadering geeft dan vaak meer informatie dan (alleen) een berekening met de *t*–waarde.
Voor deze opgaven is kennis nodig van lineaire regressie en correlatie. Deze is in hoofdstuk 8 aan de orde geweest.
Om tijd te besparen is het aan te bevelen bij de oplossing gebruik te maken van Excel. De benodigde functies zijn: RICHTING (SLOPE); SNIJPUNT (INTERCEPT) en CORRELATIE (CORRELATION). Ook een programma als SPSS komt in aanmerking.

Een andere manier is natuurlijk om Excel meteen de functie en de determinatiecoëfficiënt er bij te laten zetten. Een voorbeeld van de laatste methode.

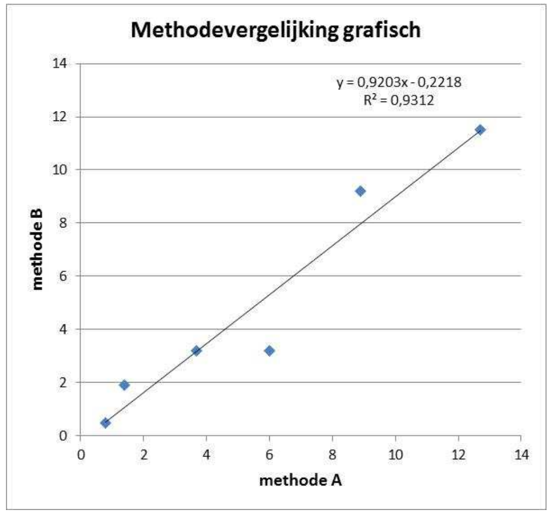
Methodevergelijking		
monster	methode A	methode B
1	0,8	0,5
2	1,4	1,9
3	3,7	3,2
4	6,0	3,2
5	8,9	9,2
6	12,7	11,5

a Maak een grafiek van de meetwaarden (methode A horizontaal). Let op: gebruik het type *spreiding*.





b Laat Excel een trendlijn toevoegen en de vergelijking en de R-kwadraat erbij zetten, zie figuur links.
Let op: vink niet aan dat het snijpunt door 0 moet lopen. De asafsnijding wordt dan nul, terwijl die belangrijke informatie geeft over de overeenkomst tussen de meetmethoden.



c Bekijk het hellingsgetal en het snijpunt met de verticale as.

d Hoe groot zijn de helling en het snijpunt met de verticale as in de ideale situatie?

e De methoden zijn vergelijkbaar als helling en snijpunt dicht genoeg bij de ideale waarden liggen. Zijn deze methoden volgens jou vergelijkbaar (wat is dicht bij, denk je)?

Om te bewijzen dat de methodes inderdaad niet significant verschillen moeten de betrouwbaarheidsintervallen van helling en intercept worden bepaald. Dat is behoorlijk omslachtig en het is verstandig om dit met statistische software te doen.

Opgave 9.13

Grafische vergelijking van meetmethoden - Valkuilen

Alleen kijken naar de correlatiecoëfficiënt en helling en asafsnijding kan bedrieglijk zijn. Goed opletten en gezond verstand zijn ook wat waard. Start daarom altijd met een **visuele inspectie**.

Bekijk de volgende meetseries.

Hb-gehalte (g/dL)		
patiënt	**methode A**	**methode B**
1	12,5	14,2
2	13,6	15,1
3	16,3	17,8
4	15,8	16,2
5	14,6	16,3
6	11,3	11,9

Ze hebben een correlatiecoëfficiënt $r = 0{,}979$. Ze voldoen aan de *t*–test.

a Vergelijk de waarden kritisch. Valt je iets op?

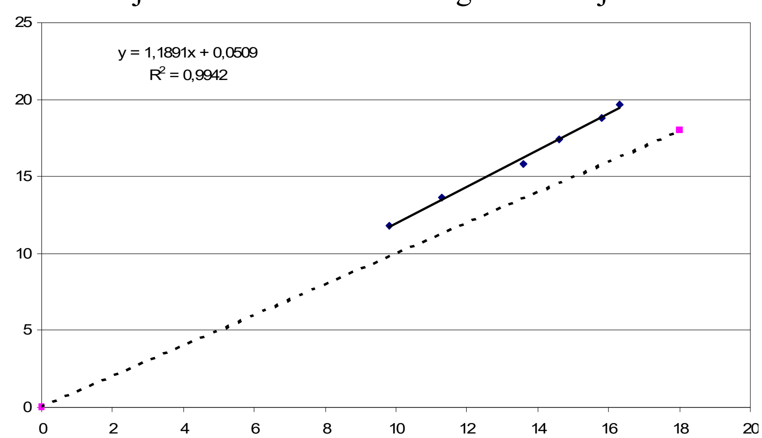
b Maak een grafiek met vergelijking en beschrijf wat er aan de hand is.

c Een van de methodes vertoont een ……... afwijking. Dat kan bijvoorbeeld een storende stof zijn die door B wel wordt gemeten en door A niet. Kan dit ook omgekeerd zijn?

Een andere valkuil wordt zichtbaar in onderstaand voorbeeld.

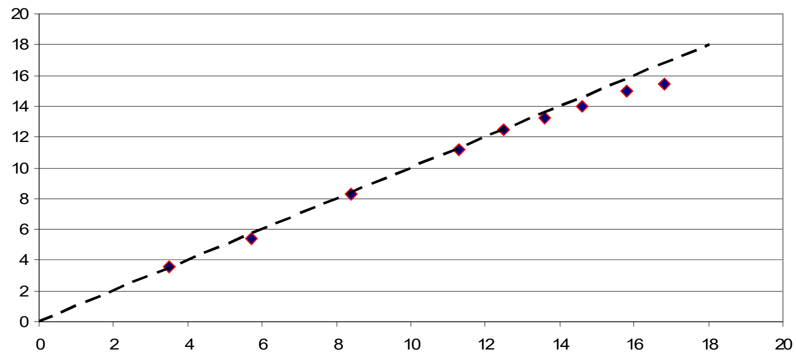
Hb-gehalte (g/dL)		
patiënt	**methode A**	**methode B**
1	13,6	15,8
2	9,8	11,8
3	16,3	19,7
4	15,8	18,8
5	14,6	17,4
6	11,3	13,6

De correlatiecoëfficiënt is afgerond maar liefst $r = 1{,}00$ en toch voldoet hij niet aan de *t*–test. In de grafiek zie je hoe dat komt:



d Blijkbaar heeft een van methoden een verkeerde helling van de kalibratielijn (dus een afwijkende gevoeligheid). Kun je vaststellen welke van de twee dat is? Hoe kan dit ontstaan zijn?

Een andere afwijking zien we in onderstaande vergelijking.



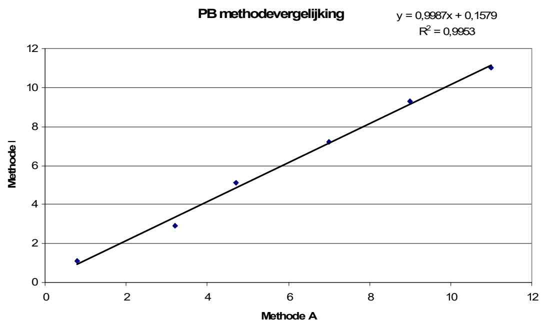
e Een van de methoden wijkt af. Hoe zie je dat en kun je zeggen welke dat is?

Opgave 9.14 Vergelijking van meetmethoden volgens Passing en Bablok

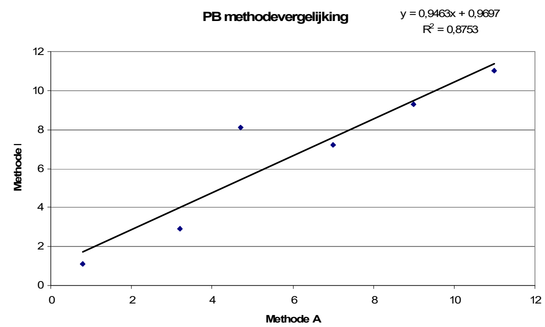
De normale lineaire regressie is zeer gevoelig voor uitschieters. **Passing en Bablok** (1983) hebben een methode bedacht die daar veel minder last van heeft.

Methodevergelijking		
patiënt	**methode A**	**methode B**
1	0,8	1,1
2	3,2	2,9
3	4,7	5,1
4	7,0	7,2
5	9,0	9,3
6	11,0	11,0

Als voorbeeld kijken we naar de dataset hierboven:
Lineaire regressie levert de linker grafiek op, zie de volgende pagina.

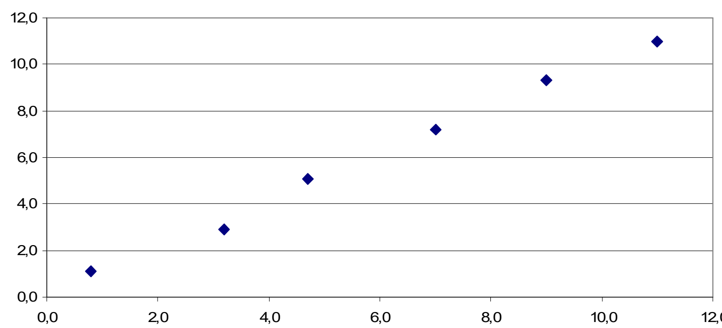


De correlatie is prima: $r = 0{,}999$. De vergelijking is $y = 0{,}9987 \cdot x + 0{,}1579$.

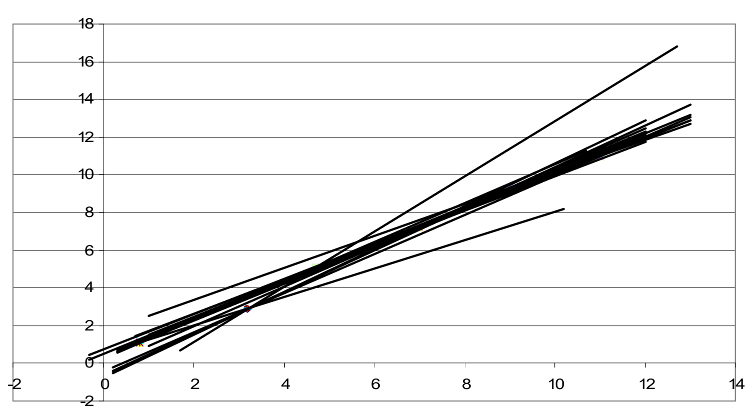


Nu brengen we een uitschieter aan, meting 3 wordt (4,7; 8,1) en dat is een forse uitschieter. De correlatie wordt slechter, $r = 0{,}935$ en het snijpunt met de y-as schuift flink naar boven:
$y = 0{,}9463 \cdot x + 0{,}8753$

De methode van Passing en Bablok werkt compleet anders:

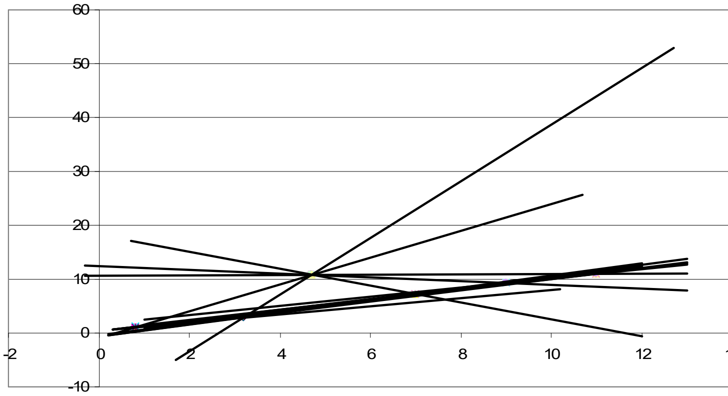


In de oorspronkelijke grafiek worden door *alle* combinaties van twee meetpunten rechte lijnen getrokken. In ons voorbeeld met 6 meetpunten zijn er dat 15.



Van al deze lijnen wordt het hellingsgetal en het snijpunt met de y-as bepaald. Van deze 2×15 waarden wordt de mediaan bepaald. In ons voorbeeld levert dat: (mediaan)$a = 0{,}98$ en (medi-

aan) $b = 0{,}31$. Deze waarden leveren de benaderde rechte lijn op, dus $y = 0{,}98 \cdot x + 0{,}31$.
Met de uitschieter ziet de grafiek met alle hellingen er zeer verontrustend uit:

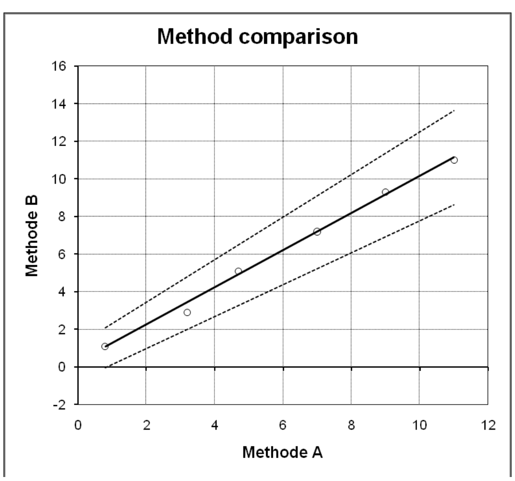


De vergelijking van de uiteindelijke rechte lijn wordt echter weer $y = 0{,}98 \cdot x + 0{,}31$. Vergelijk dit eens met de "gewone" methode. De Passing en Bablok methode is inderdaad niet gevoelig voor een sterke uitschieter!

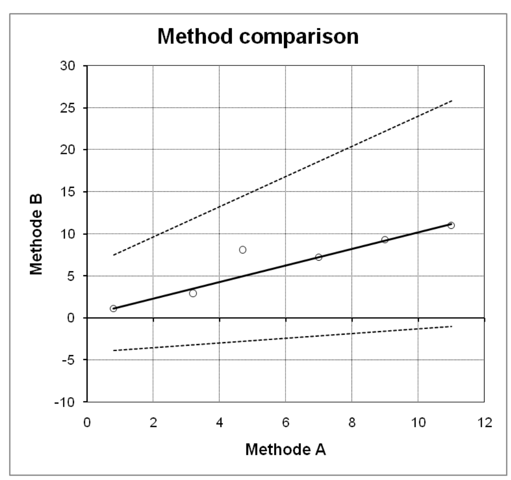
19

10.1

Met Excel kun je geen Passing en Bablok regressie doen. Een aanvulling op Excel waarmee dat wel kan is *Analyse-it*, maar dat moet gekocht worden. Er is wel een demoversie te downloaden.
Op de Duitse website: www.acomed-statistik.de kun je een Excel werkblad downloaden waarmee je Passing en Bablok regressie kunt uitvoeren.
Het resultaat van bovenstaand probleem zie je onder:



Zonder uitschieter
$y = 0{,}984 \cdot x + 0{,}313$



Met uitschieter
$y = 0{,}984 \cdot x + 0{,}313$

a Waar zit het verschil nu in de uitslag? Kijk in de grafiek!

De software geeft ook de betrouwbaarheidsintervallen:

Resultaat van PB-Regressie	
helling	0,9839
ondergrens 95%-BI	0,8500
bovengrens 95%-BI	1,1316
snijpunt	0,3129
ondergrens 95%-BI	-0,7211
bovengrens 95%-BI	1,1775

Zonder uitschieter

Resultaat van PB-Regressie	
helling	0,9839
ondergrens 95%-BI	0,2791
bovengrens 95%-BI	1,7949
snijpunt	0,3129
ondergrens 95%-BI	-4,1038
bovengrens 95%-BI	6,0174

Met uitschieter

b Zijn de methoden vergelijkbaar? Dus: liggen de ideale waarden in de gevonden betrouwbaarheidsintervallen?

c Maak zelf een Passing-Bablok analyse van de volgende meetserie en trek een conclusie.

nr	Flowmeter 1 (L/min)	Flowmeter 2 (L/min)
1	494	512
2	395	430
3	557	625
4	267	260
5	178	269
6	656	626
7	434	428
8	417	432
9	516	508
10	421	443

Opgave 9.15

Vergelijking van meetmethoden volgens Deming

W. Edwards Deming (1943) heeft een lineaire regressie bedacht die rekening houdt met de fouten die in de meetresultaten voorkomen.

10.2

20

Op de website
http://peltiertech.com/WordPress/deming-regression-utility/
kun je een Excel tool (PTS Charts) vinden om je aan je eigen Excel menu toe te voegen. Hiermee kun je zelf Deming regressie toepassen.

Vergelijk voor de volgende methodevergelijking de “gewone” regressie met de Deming regressie.

Met twee apparaten (Coulter LH 750) en (Coulter Act 5 diff) is het aantal leukocyten per liter bloedserum bepaald.

nr	Leuko (Act 5) $\times 10^9$/L	Leuko (LH750) $\times 10^9$/L
1	8,0	8,0
2	8,4	9,0
3	6,4	6,7
4	12,1	12,6
5	4,7	4,5
6	16,9	16,3
7	7,3	7,7
8	13,0	13,4
9	3,1	3,9
10	8,7	8,1

Vergelijk voor deze methodevergelijking de "gewone" regressie met de Deming regressie.

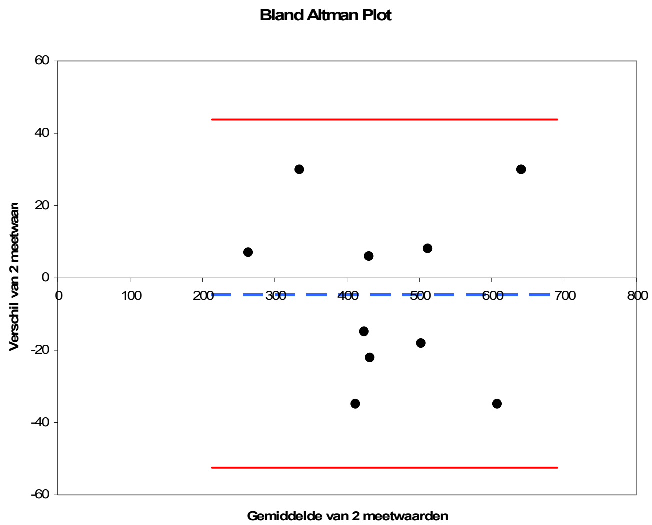
Opgave 9.16

De analyse volgens Bland en Altman

Bland en Altman hebben een statistische analyse bedacht die geen vergelijking van een rechte lijn bepaalt, maar waarin steeds het verschil van de 2 meetwaarden t.o.v. het gemiddelde wordt weergegeven. Van een meetserie met 2 flowmeters wordt zo'n plot getekend. Hiervoor gebruiken we weer een tabel.

nr	Flowmeter 1 (L/min)	Flowmeter 2 (L/min)	Verschil 1 en 2 (L/min)	Gemiddelde (L/min)
1	494	512	-18	503
2	395	430	-35	412,5
3	590	625	-35	607,5
4	267	260	7	263,5
5	350	320	30	335
6	656	626	30	641
7	434	428	6	431
8	417	432	-15	424,5
9	516	508	8	512
10	421	443	-22	432
		gemiddelde	-4,4	
		st.deviatie	24,1	

Het gemiddelde van 2 meetwaarden wordt op de x-as uitgezet en het verschil op de y-as. De 2σ grenzen worden bepaald en ook in de grafiek weergegeven.



a Bereken de $+2\sigma$ en -2σ grenzen.
b Hoe groot is het gemiddeld verschil tussen de metingen?
c Er is dus een systematische afwijking (**bias**) van ....
d Hoe kun je hiervoor corrigeren?

21

Men gaat ervan uit dat er met een betrouwbaarheid van 95 % geen significant verschil is tussen de twee methodes als de verschilwaarden binnen de 2σ grenzen liggen.
e Verschillen deze methoden dus significant?

Met name bij klinische toepassingen moet nog wel gekeken worden of de bias en afwijking 2σ niet te groot zijn.

Voor meer zekerheid kan het 95% betrouwbaarheidsinterval van de afwijking (bias, dus het gemiddelde verschil) worden bepaald.
f Bereken dit interval.

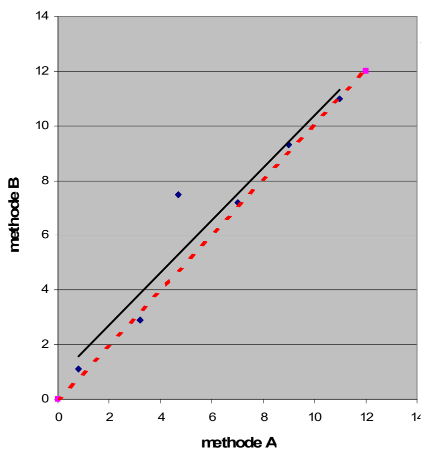
Ook voor de bovengrens en de ondergrens kunnen de intervallen worden bepaald. Voor de standaardfout (SE) van deze grenzen mag je rekenen met: $SE = \sqrt{\frac{3\sigma^2}{n}}$
g Bereken intervallen van de grenzen.
h Doe een uitspraak over de overeenkomst van beide methoden.

Opgave 9.17 **Grafische vergelijking van meetmethoden - Uitschieters**

Als na het maken van de grafiek het vermoeden bestaat dat er uitschieters in het spel zijn, kan er een test uitgevoerd worden. Hierbij wordt gekeken of het absolute verschil tussen elk meetpaar groter is dan vier maal het gemiddelde absolute verschil.

Dus de testvoorwaarde is: $|y_i - x_i| > 4 \times \overline{|y_i - x_i|}$.
Is dit het geval dan wordt het meetpaar tot uitschieter verklaard.

Bij gebruik van Excel voor het maken van een grafiek kan deze test ook eenvoudig met Excel worden uitgevoerd. Zie het voorbeeld hieronder met bijbehorende grafiek.



patiënt	methode A	methode B	verschil	verschil abs	test (4x)
1	0,8	1,1	-0,3	0,3	-2,3
2	3,2	2,9	0,3	0,3	-2,3
3	4,7	7,5	-2,8	2,8	0,2
4	7	7,2	-0,2	0,2	-2,4
5	9	9,3	-0,3	0,3	-2,3
6	11	11	0	0	-2,6
		gemiddeld	-0,55	0,65	

Voer zelf de test uit met onderstaande meetserie en bereken vervolgens de correlatiecoëfficiënt en de vergelijking van de regressielijn.

18

Methodevergelijking		
monster	methode A	methode B
1	0,8	0,5
2	1,4	1,9
3	3,7	3,2
4	6,0	3,2
5	8,9	9,2
6	12,7	11,5

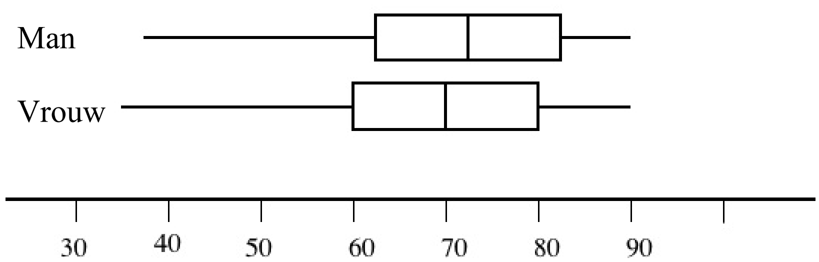
9.1

S1 Er zijn 3 versies van de t-test beschreven en een van de F-test. Beschrijf in welke situatie elke test van toepassing is.
S2 Geef ook van elk een voorbeeld.
S3 Wanneer test je eenzijdig en wanneer tweezijdig? Leg uit.
S4 Waarom is het eigenlijk beter om altijd tweezijdig te testen?
S5 In welke schema (stappenplan) moeten dergelijke testen uitgevoerd worden?
S6 Geef voorbeelden van een onderzoek waarbij je hypotheses moet opstellen.
S7 Hoe gaat de grafische methodevergelijking in zijn werk? Hoe groot zijn de ideale waarden?
S8 Geef voorbeelden van valkuilen bij grafische methodevergelijking

10 Extra oefeningen

Opgave 10.1 **Boxplot**

De scores van studenten bij een statistiektoets zijn uitgezet in een boxplot.



Welke uitspra(a)k(en) zijn ***niet*** juist?
A 50 % van de vrouwen heeft minder dan 70 punten gehaald.
B 50 % van de vrouwen heeft een score tussen 60 en 70 punten.
C De mediaan ligt bij de mannen hoger dan de vrouwen.
D Het gemiddelde ligt bij de mannen lager dan de vrouwen.
E De maximale score is gelijk.

Opgave 10.2 **Stam-blad**

Gegeven een set waarnemingen:

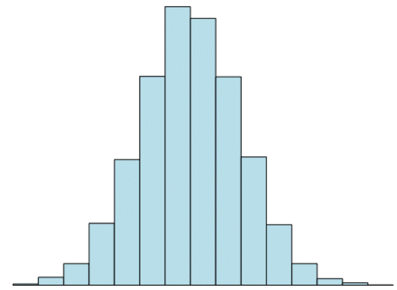
1 | 1 3 5 6 8
2 | 2 2 7
3 | 9
4 | 1 6
5 | 0

Bepaal van deze data:
a de spreidingsbreedte w;
b de mediaan;
c de modus.

Opgave 10.3 — Scheef of symmetrisch?

Er zijn 1000 waarnemingen uitgezet in een histogram.
Wat is juist? De verdeling is:

A rechts scheef;
B links scheef;
C ongeveer symmetrisch;
D moeilijk te zeggen.



Opgave 10.4 — Tijdsduur

Een groep van 12 studenten heeft een test gedaan. De tijden dat ze erover gedaan hebben zijn in minuten: 10, 9, 12, 15, 22, 11, 17, 20, 19, 26, 13, 17.
Bepaal:

a de spreidingsbreedte w;
b de mediaan;
c de modus,
d het gemiddelde,
e de standaarddeviatie (populatie of steekproef?)
f de variatiecoëfficiënt .

Opgave 10.5 — Zoutgehalte

Met de simulatie
http://www.micquality.com/introductory_statistics/int16.htm
zijn 10 **SRS** (Eng. simple random samples) genomen van een zoutwater monster.
De meetwaarden zijn:

53,74	51,63
47,72	38,56
55,95	45,76
54,88	59,76
53,97	41,97

a Bepaal of er uitschieters zijn.
b Bereken gemiddelde, standaarddeviatie en variatiecoëfficiënt .
c Moet er afgerond worden?

Opgave 10.6 **Autobanden**

De gemiddelde levensduur van een type autoband is 36.000 km met een standaarddeviatie van 2700 km.

a Hoeveel % van de banden gaat langer mee dan 40.000 km?

b Hoe groot is de kans dat een willekeurige band langer mee gaat dan 40.000 km?

Opgave 10.7 **Chloridegehalte**

Een analysemethode geeft de chloridegehalte van watermonsters met een variatiecoëfficiënt van 1.2 %. Er treden geen systematische fouten op. Wanneer de werkelijke concentratie van een monster 7,17 mg/L is, in welk gebied zullen dan 50% van de analyseresultaten komen te liggen ?

Opgave 10.8 **Cacaogehalte van chocolade**

Het lab van de Voedsel- en Warenautoriteit VWA meet een *cacaogehalte* van een reep pure chocolade van 35 %. Dat is te weinig (moet minimaal 50 % zijn), De meting wordt herhaald, nu met een controlemonster waarvan bekend is dat μ = 34,5 %. De variatiecoëfficiënt van het controlemonster is 1,5 %.
Je meet dan de volgende waarden:

cacao in pure chocolade	gehalte (%)
meting 1	32
meting 2	37
meting 3	40
meting 4	31
controlemonster	32

a Bereken het gemiddelde en de standaarddeviatie.

b Geef een getal voor de precisie van jouw metingen.

c Welke conclusie mag je trekken uit jouw uitslag van het controlemonster?

d Wat vertel je de fabrikant van de chocolade?

Opgave 10.9 **Onderzoek van afvalwater**

Met de analysemethode AAS is het Cr^{3+}-gehalte van afvalwater bepaald.
De uitslagen zijn in ppm.

AAS apparaat

Cr^{3+}-gehalte van afvalwater			
25,4	26,3	27,1	25,9

a Bereken het gemiddelde en de standaarddeviatie van de steekproef.

b Bereken het 95 % betrouwbaarheidsinterval van het Cr^{3+}-gehalte.

Opgave 10.10 **Controle van een standaardoplossing**

In het lab staat een veelgebruikte $KMnO_4$ oplossing waarvan bekend is dat de concentratie 3,16 $g \cdot L^{-1}$ is met een variatiecoëfficiënt van 2 %. Dit reagens kan verlopen door autokatalytische ontleding.

Ter controle wordt iedere dag een monster bepaald. De volgende waarden worden gevonden.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3,18	3,10	3,12	3,05	3,20	3,19	3,30	3,26	3,24	3,27

Moest hier op een bepaald moment actie ondernomen worden? Als bewijs van je advies is het raadzaam een controlekaart bij te voegen.

Opgave 10.11 **Reproduceerbaarheid**

Met een controlemonster wordt een meetmethode voor de bepaling van het aeroob koloniegetal gedurende 19 dagen gecontroleerd.. Het controlemonster heeft een koloniegetal van $2{,}5 \cdot 10^5$ KVE/g met een variatiecoëfficiënt van 30 %.

Dit monster wordt dagelijks meegenomen in de analyse en bijgehouden op een controlekaart. De dagelijkse metingen van het controlemonster staan in onderstaande tabel.

dag	Controlemonster Koloniegetal ($\times 10^5$ KVE/g)	dag	Controlemonster Koloniegetal ($\times 10^5$ KVE/g)
1	2,20	11	1,40
2	3,10	12	1,20
3	2,00	13	1,65
4	4,10	14	1,60
5	3,40	15	0,20
6	3,50	16	2,00
7	4,40	17	1,60

8	0,90	18	2,60
9	1,50	19	2,70
10	1,20		

Stel de controlekaart op, vul hem met de metingen en bepaal op welke dag er welke actie nodig was geweest.

Opgave 10.12 **Benzeen in sigaren en sigaretten**

Van sigaren is het benzeengehalte gemeten. Van sigaretten was het al bekend.

Benzeengehalte (μg/g)		
	sigaar	**sigaret**
n	7	
$\bar{x}$	151	
σ_{n-1}	9	
μ		81

Is het mogelijk dat het benzeengehalte van sigaren hetzelfde is als dat van sigaretten? Onderzoek dit met de *t*-test.

Antwoorden

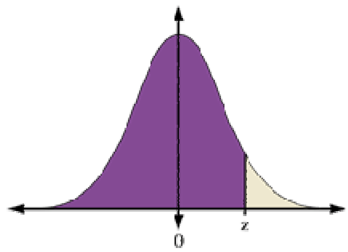
Alle antwoorden en uitwerkingen van de opgaven en R-vragen zijn te vinden op de website: www.vervoortboeken.nl

1e Bijlage Dixons-test of Q-test

Kritische waarden voor losse uitschieters

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$Q_{kritisch}$	0,94	0,76	0,64	0,56	0,51	0,47	0,44	0,41	0,39
n	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$Q_{kritisch}$	0,37	0,35	0,34	0,33	0,32	0,31	0,30	0,29	0,28
n	21	22	23	24	25	30	35	40	45
$Q_{kritisch}$	0,29	0,29	0,28	0,28	0,28	0,26	0,25	0,24	0,23

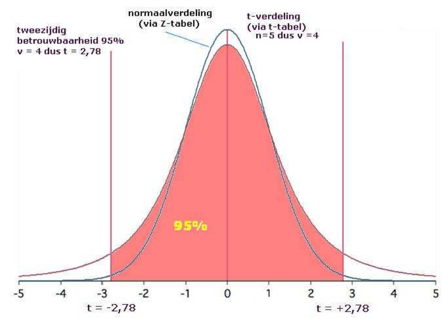
2e Bijlage *Z*-tabel normaalverdeling



Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

3e Bijlage Student *t*-tabel T-verdeling

Voorbeeld:
tweezijdig 95% betrouwbaarheid
$n = 5 \rightarrow v = 4$
Tabel $\rightarrow$ $t = 2{,}78$



$v = n - 1$

eenzijdig	90%	95%	97,5%	99%	99,5%
tweezijdig	**80%**	**90%**	**95%**	**98%**	**99%**
v					
1	3,08	6,31	12,71	31,82	63,66
2	1,89	2,92	4,30	6,96	9,92
3	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84
4	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60
5	1,48	2,02	2,57	3,36	4,03
6	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71
7	1,41	1,89	2,36	3,00	3,50
8	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36
9	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25
10	1,37	1,81	2,23	2,76	3,17
11	1,36	1,80	2,20	2,72	3,11
12	1,36	1,78	2,18	2,68	3,05
13	1,35	1,77	2,16	2,65	3,01
14	1,35	1,76	2,14	2,62	2,98
15	1,34	1,75	2,13	2,60	2,95
16	1,34	1,75	2,12	2,58	2,92
17	1,33	1,74	2,11	2,57	2,90
18	1,33	1,73	2,10	2,55	2,88
19	1,33	1,73	2,09	2,54	2,86
20	1,33	1,72	2,09	2,53	2,85
21	1,32	1,72	2,08	2,52	2,83
22	1,32	1,72	2,07	2,51	2,82
23	1,32	1,71	2,07	2,50	2,81
24	1,32	1,71	2,06	2,49	2,80
25	1,32	1,71	2,06	2,49	2,79
26	1,31	1,71	2,06	2,48	2,78
27	1,31	1,70	2,05	2,47	2,77
28	1,31	1,70	2,05	2,47	2,76
29	1,31	1,70	2,05	2,46	2,76
30	1,31	1,70	2,04	2,46	2,75
40	1,30	1,68	2,02	2,42	2,70
60	1,30	1,67	2,00	2,39	2,66
120	1,29	1,66	1,98	2,36	2,62
∞	1,28	1,64	1,96	2,33	2,58

4e Bijlage *F* - tabel

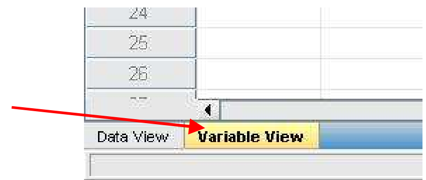
	***F*-waarden 95% betrouwbaarheid tweezijdig**													
	vrijheidsgraden grootste standaarddeviatie ($v = n - 1$)													
v	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**15**	**20**	**60**	**∞**
1	647,8	799,5	864,2	899,6	921,8	937,1	984,2	956,7	963,3	968,6	948,9	993,1	1010,0	1018,0
2	38,51	39,00	39,17	39,25	39,30	39,33	39,36	39,37	39,39	39,40	39,43	39,45	39,48	39,50
3	17,44	16,04	15,44	15,10	14,88	14,73	14,62	14,54	14,47	14,42	14,70	14,17	13,99	13,90
4	12,22	10,65	9,98	9,60	9,36	9,20	9,07	8,98	8,90	8,84	8,66	8,56	8,36	8,26
5	10,01	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,85	6,76	6,68	6,62	6,43	6,33	6,12	6,02
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,70	5,60	5,52	5,46	5,27	5,17	4,96	4,85
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,99	4,90	4,82	4,76	4,57	4,47	4,25	4,14
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,53	4,43	4,36	4,30	4,10	4,00	3,45	3,67
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,20	4,10	4,03	3,96	3,77	3,67	3,20	3,33
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,95	3,85	3,78	3,72	3,52	3,42	2,85	3,08
15	6,20	4,77	4,15	3,80	3,58	3,41	3,29	3,20	3,12	3,06	2,86	2,76	2,52	2,40
20	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	3,01	2,91	2,84	2,77	2,57	2,46	2,22	2,09
60	5,29	3,93	3,34	3,01	2,79	2,63	2,51	2,41	2,33	2,27	2,06	1,94	1,67	1,48
∞	5,02	3,69	3,12	2,79	2,57	2,41	2,29	2,19	2,11	2,05	1,83	1,71	1,39	1,00

	***F*-waarden 95% betrouwbaarheid eenzijdig ($v = n - 1$)**													
	vrijheidsgraden grootste standaarddeviatie													
v	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**15**	**20**	**60**	**∞**
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,77	238,9	240,54	241,88	246,0	248,0	252,2	254,3
2	18,5	19,0	19,2	19,3	19,3	19,3	19,3	19,4	19,38	19,40	19,4	19,4	19,5	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,84	8,81	8,79	8,70	8,67	8,57	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,86	5,80	5,69	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,62	4,56	4,43	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	3,94	3,87	3,74	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,51	3,44	3,30	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,22	3,15	3,01	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,01	2,94	2,79	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,84	2,77	2,62	2,54
15	4,54	3,69	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,40	2,33	2,16	2,07
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,20	2,12	1,95	1,84
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	1,92	1,84	1,64	1,51
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,84	1,75	1,53	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96	1,91	1,75	1,66	1,43	1,25
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,67	1,57	1,32	1,00

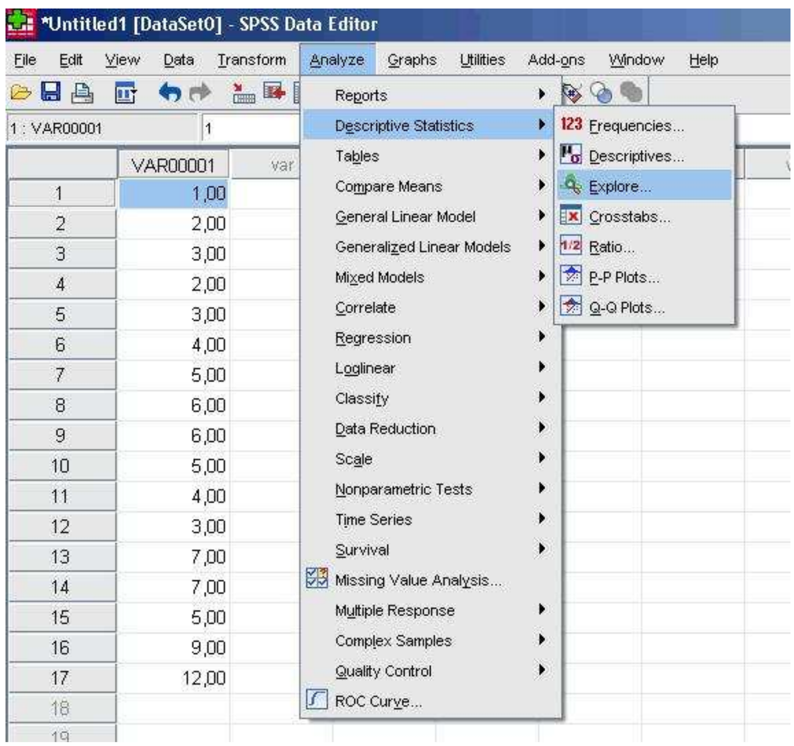
5e Bijlage SPSS

Onderzoek van data

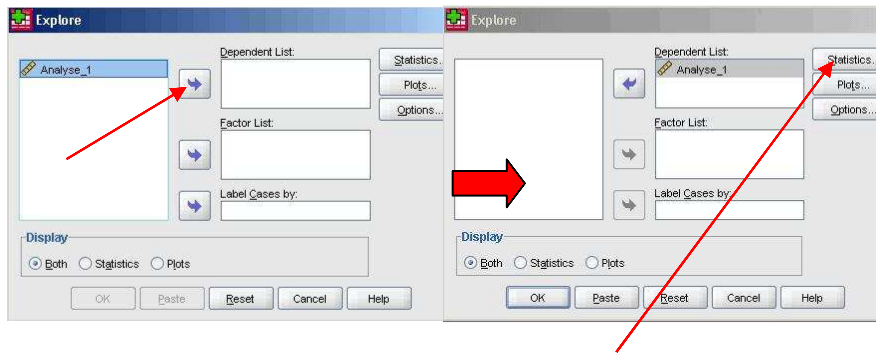
1. Start een versie van SPSS. Je komt automatisch in de Data Editor.
2. Type de gegevens in of importeer ze vanuit een tabel in Word of Excel.
3. In de Variable View (tabblad linksonder op het scherm) kun je de meetserie een naam geven.



4. Kies **Analyse** – **Descriptive Statistics** – **Explore**

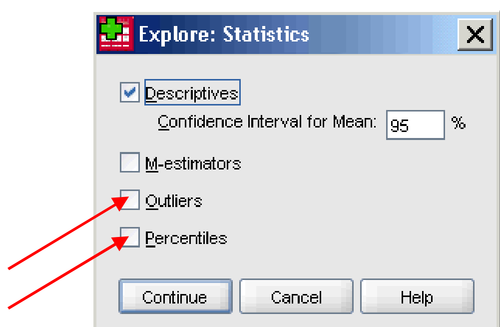


5. Kies de meetserie(s) die je wilt onderzoeken.



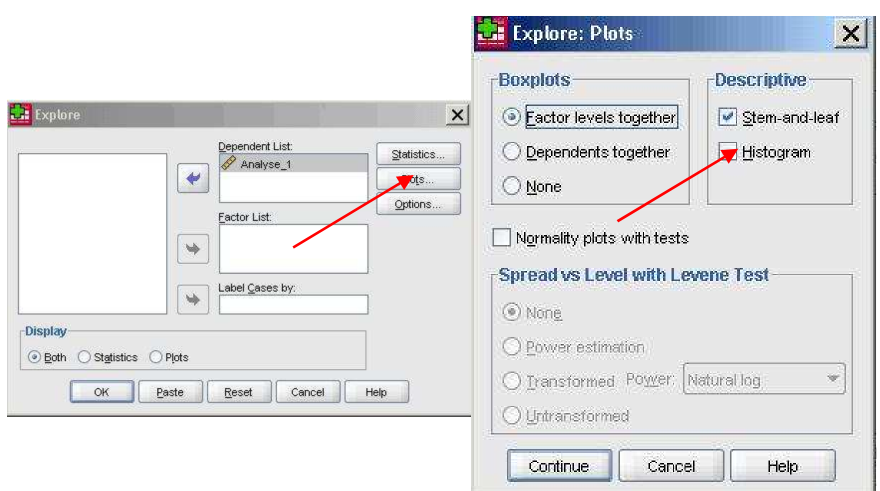
6. Stel in wat je wilt onderzoeken met het knopje **Statistics**

7. Vink **Outliers** (= uitschieters) en **Percentiles** (= kwartielen enzo) aan.



Druk daarna op **Continue**.

8. Kies **Plots** en vink **Histogram** aan. Druk op **Continue**.

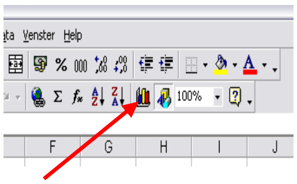


9. Druk tenslotte op **OK**.

10. Je krijgt een overzicht van:
    - Descriptives: statische parameters zoals minimum, maximum gemiddelde, mediaan, standaarddeviatie
    - Percentiles: de grenzen van 5, 10, 25, 50, 75, 90 en 95 % van de meetwaarden.
    - Extreme Values: de 5 hoogste en 5 laagste waarden.
    - Het Histogram.
    - Het Stem and Leaf (= Stam en Blad) diagram, met uitschieters aangegeven.
    - De Box Plot, met uitschieters aangegeven.

    Alle uitslagen kunnen bewaard worden en apart bekeken worden met de SPSS Viewer. Ook kunnen ze gekopieerd worden en bijvoorbeeld in Word worden geplakt.

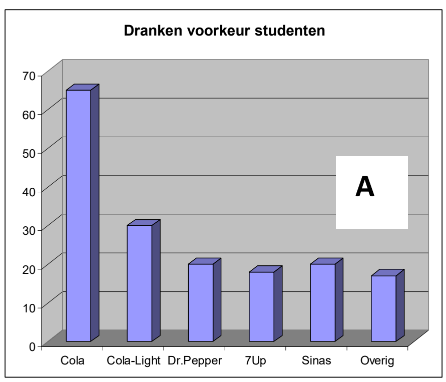
6e BIJLAGE Meetgegevens grafisch

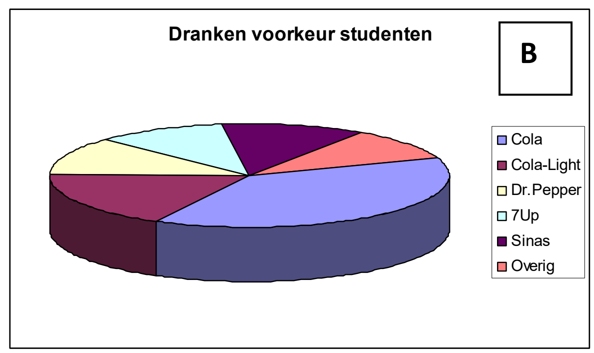


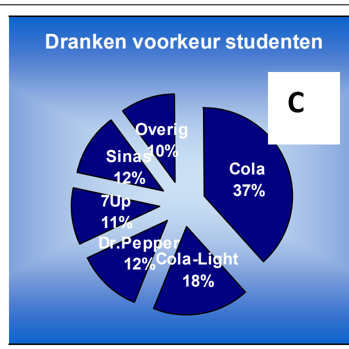
Gegevens (data) kunnen op verschillende manieren grafisch (in een plaatje) weergegeven worden. Een uitstekend hulpmiddel hiervoor is Excel, het spreadsheetprogramma van Microsoft. Als voorbeeld de frisdrankenvoorkeur van 170 studenten.

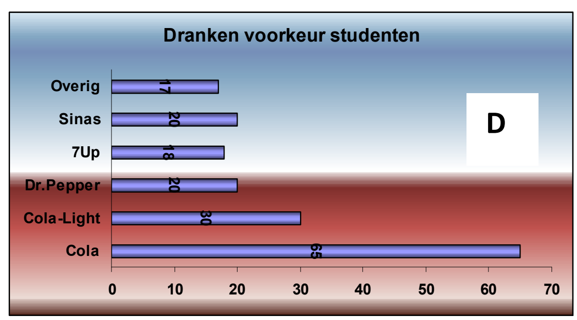
Frisdranken voorkeur					
Cola	Cola-Light	Dr.Pepper	7Up	Sinas	Overig
65	30	20	18	20	17

Deze tabel kan in Excel met de grafiekentool in een grafiek worden omgezet.
Voorbeelden:









Opgave B6.1 **Verschillende grafische weergaven**

Welke naam hoort bij de bovenstaande grafische weergaven ?

Opgave B6.2 Zelf een diagram maken

Van 25 Utrechtse studenten is de bloedgroep bepaald:

AB	B	A	0	B
0	B	0	A	0
B	0	B	B	B
A	0	AB	AB	0
A	B	AB	0	A

a Maak een **frequentietabel** van deze uitslagen: (frequentie = hoe vaak iedere bloedgroep voorkomt).

b Maak een geschikt diagram met Excel.

c Kun je met dit resultaat ook een uitspraak doen over de bloedgroepenverdeling van alle Nederlandse studenten? Leg uit.

Opgave B6.3 Energieverbruik

Energieverbruik in Nederland in 2006 (PJ)				
steenkool	**aardolie**	**aardgas**	**elektriciteit**	**overig**
99	1073	1172	320	135

a Schrijf bovenstaande waardes in een wetenschappelijke notatie.

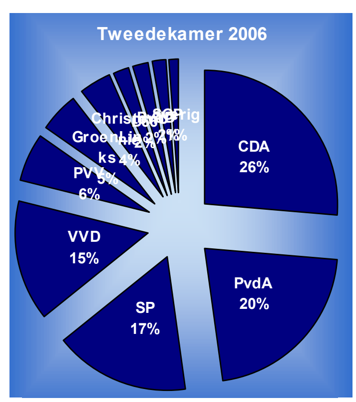
b Maak met behulp van Excel een handige grafiek.

c Hoeveel % van ons energieverbruik is afkomstig van aardolie?

d Waaruit bestaat de categorie "overig"?

Opgave B6.4 Verkiezingen

In de figuur zie je de uitslag van de Tweede-Kamerverkiezingen in 2006. Totaal brachten 9.838.683 mensen een stem uit.



a Hoeveel mensen hebben minstens SP gestemd?

b Boven welk aantal wordt het aantal 18%?

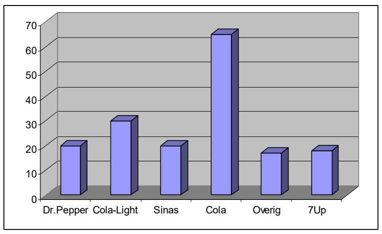
Er stemden 579.490 mensen op de PVV.

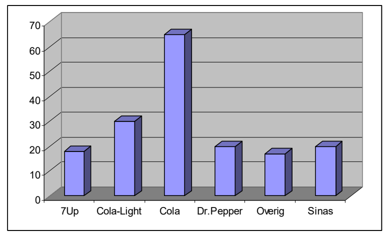
d Klopt het percentage?

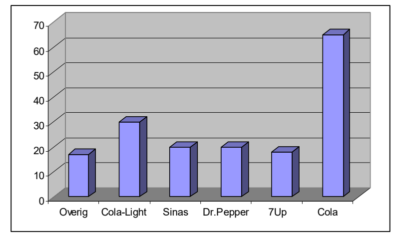
e De Tweede Kamer heeft 150 zetels. Hoeveel zetels kreeg de PVV?

Opgave B6.5 **Wiskundecijfers**

In de vorige opdrachten maakte de volgorde waarin de gegevens werden weergegeven niet uit. Zie als voorbeeld de frisdranken-voorkeur van studenten.



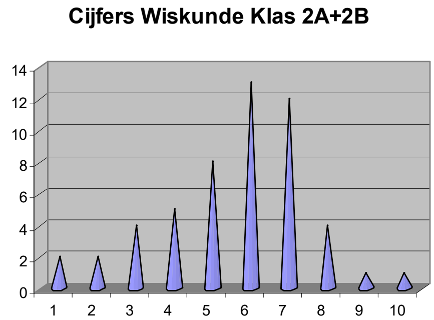


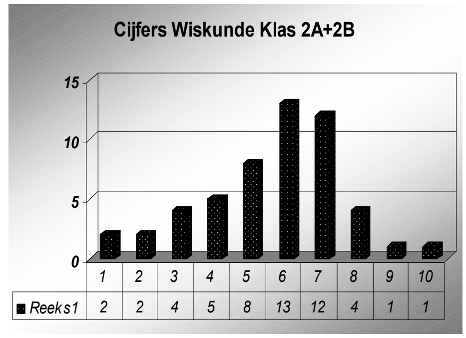


Vaak maakt de volgorde wel uit.
In de tabel hieronder zijn de behaalde cijfers van een wiskunde-toets van 52 studenten weergegeven in een frequentietabel.

Cijfer	Aantal studenten
1	2
2	2
3	4
4	5
5	8
6	13
7	12
8	4
9	1
10	1

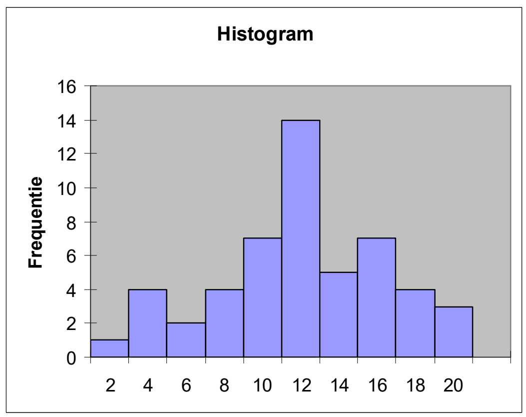
Hieronder zijn twee grafieken weergegeven.





a Waarom is het in dit geval niet verstandig de plaatsen van de kolommen te wisselen?

b Een staafdiagram (van een variabele) waarvan de staven zo breed zijn dat ze tegen elkaar staan heet een **histogram**.



Teken zelf een histogram van de wiskundecijfers uit de vorige opgave.

B6.1

S1 Welke soorten Excel grafieken zijn bruikbaar bij statistisch onderzoek en waarom?

S2 Wat is een frequentietabel? Hoe gebruik je die?

S3 Wat is het verschil tussen een staafdiagram en een histogram?

7e Bijlage Mindmap Nauwkeurigheid van meetresultaten