3 Gebroken functies

Opgave 3.2 **Grafieken verschuiven.**

tool 3.1

tool 3.2

a 2 naar links en 1 naar beneden

$$m(x)=\frac{4(x+2)+1}{(x+2)-2}=\frac{4x+9}{x}$$

Door voor x de term (x + 2) in te vullen verschuif je de grafiek twee plaatsen naar links. Voor x = -2 heeft deze grafiek van m(x) dezelfde waarde als f(x) voor x = 0.

$$n(x)=\frac{4x+9}{x}-1 \quad of \quad n(x)=\frac{4x+9}{x}-\frac{1\times x}{x}=\frac{4x+9-x}{x}=\frac{3x+9}{x}$$

Door m(x) – 1 te doen worden alle waardes van m(x) met 1 verminderd. De grafiek schuift dus 1 naar beneden.

b 3 naar rechts en 2 naar boven

$$k(x)=\frac{4(x-3)+1}{(x-3)-2}+2=\frac{4x-11}{x-5}+2$$

$$of \quad k(x)=\frac{4x-11}{x-5}+\frac{2(x-5)}{(x-5)}=\frac{6x-21}{x-5}$$

Welke verschuiving hoort bij het volgende functievoorschrift ?

c

$$g(x)=\frac{4(x+2)+1}{(x+2)-2}+1$$

verschuiving **2** naar links en **1** naar boven

d

$$g(x)=\frac{4(x+2)+1}{(x+2)-2}+1=\frac{4x+9}{x}+1=\frac{4x+9+x}{x}=\frac{5x+9}{x}$$

$$algemeen: g(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$$

$$met\ a=5;\ b=9;\ c=1\ en\ d=0$$

e

$$g(x)=\frac{9}{x}+5$$

$$\text{als } g(x)=\frac{a}{bx+c}+d$$

$$\text{dan}: a=9;\ b=1;\ c=0\ en\ d=5$$

Als $x \to \pm\infty$ dan $f(x) \to 5$ dus horizontale asymptoot $y = 5$
Als $x \uparrow 0$ dan $f(x) \to -\infty$
Als $x \downarrow 0$ dan $f(x) \to \infty$ dus verticale asymptoot $x = 2$

f $f(x)=\dfrac{4x+1}{x-2}=\dfrac{\frac{4x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{2}{x}}=\dfrac{4+\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}}$

Als $x \to \pm\infty$ dan $f(x) \to 4$ dus horizontale asymptoot $y = 4$
Als $x \uparrow 2$ dan $f(x) \to -\infty$
Als $x \downarrow 2$ dan $f(x) \to \infty$ dus verticale asymptoot $x = 2$
Als x van links naar 2 gaat is (x – 2) negatief en zeer klein en is de y-waarde dus negatief en zeer groot.
Als x van rechts naar 2 gaat is (x – 2) positief en zeer klein en is de y-waarde dus positief en zeer groot.

Limietnotatie:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{4x+1}{x-2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4+\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right)=4$$

$$\lim_{x\uparrow 2}\left(\frac{4x+1}{x-2}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\downarrow 2}\left(\frac{4x+1}{x-2}\right)=\infty$$

Opgave 3.4 Functievoorschrift herleiden

tool 3.1

tool 3.2

a $y=\dfrac{1}{x}+2=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2x}{x}=\dfrac{1+2x}{x}$

b $y=\dfrac{1}{x-2}+2=\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2(x-2)}{(x-2)}=\dfrac{2x-3}{x-2}$

c $y=\dfrac{3x+4}{x-2}=\dfrac{3(x-2)+3\times 2+4}{x-2}=\dfrac{3(x-2)+10}{x-2}=\dfrac{10}{x-2}+3$

d $y=\dfrac{-0,5x-2}{x+1}=\dfrac{-0,5(x+1)+0,5-2}{x+1}=\dfrac{-1,5}{x+1}-0,5$

e $y=\dfrac{2x+7}{x+3}$ $(x \neq -3)$

Als $x \uparrow -3$ dan $(x + 3)$ zeer klein ($\to 0$) en positief en omdat $(2x + 7)$ dan ongeveer $+1$ is gaat de *y-waarde* naar $+\infty$

f $y=\dfrac{2(x^2-4)}{x-2}=\dfrac{2(x+2)(x-2)}{(x-2)}=2(x-2)$ $(x \neq 2)$

De grafiek is een rechte lijn met helling 2 en snijpunt y-as (0; -4)
Voor $x = 2$ is de functie niet gedefinieerd! Dit is een gaatje in de grafiek. Je kunt dit aangeven met een open rondje.

Opgave 3.6 **Snijpunten bepalen en tekenonderzoek.**

tool 3.3

tool 3.4

a

$$f(x)=\frac{2x+3}{x-3} \quad \text{en} \quad g(x)=x+1 \qquad x\neq 3$$

$$\frac{2x+3}{x-3}=x+1 \rightarrow 2x+3=(x+1)(x-3)$$

$$\rightarrow 2x+3=x^2-2x-3$$

$$\rightarrow x^2-4x-6=0$$

$$D=b^2-4ac=16-4\times 1\times -6=40$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a} \rightarrow x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{40}}{2}=2\pm\sqrt{10}$$

$$x_1=2+\sqrt{10} \rightarrow y_1=x+1=3+\sqrt{10} \rightarrow \textit{snijpunt } 1:((2+\sqrt{10});(3+\sqrt{10}))$$

$$x_2=2-\sqrt{10} \rightarrow y_2=x+1=3-\sqrt{10} \rightarrow \textit{snijpunt } 2:((2-\sqrt{10});(3-\sqrt{10}))$$

$$\textit{afgerond}: S\,1:(5{,}16;\,6{,}16) \quad \textit{en} \quad S\,2:(-1{,}16;\,-0{,}16)$$

b

$$f(x)=\frac{2x+3}{x-3} \quad \text{en} \quad g(x)=-x+5 \qquad x\neq 3$$

$$\frac{2x+3}{x-3}=-x+5 \rightarrow 2x+3=(-x+5)(x-3)$$

$$\rightarrow 2x+3=-x^2+8x-15$$

$$\rightarrow x^2-6x+18=0$$

$$D=b^2-4ac=36-4\times 1\times 18=-36$$

$D<0$ dus geen oplossingen ofwel geen snijpunten.

c

$$f(x)=\frac{2x+2}{x-3} \quad \text{en} \quad g(x)=\frac{x-2}{x+2} \qquad x\neq 3 \wedge x\neq -2$$

$$\frac{2x+2}{x-3}=\frac{x-2}{x+2} \rightarrow (2x+2)(x+2)=(x-3)(x-2)$$

$$\rightarrow 2x^2+6x+4=x^2-5x+6$$

$$\rightarrow x^2+11x-2=0$$

$$D=b^2-4ac=121-4\times 1\times -2=129$$

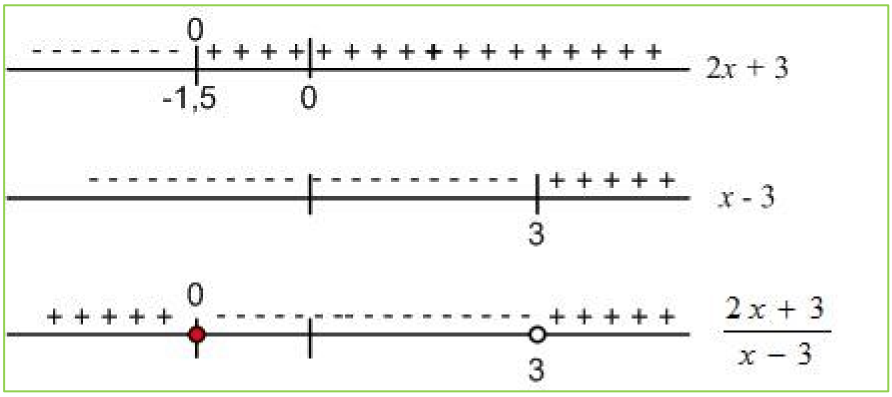
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a} \rightarrow x_{1,2}=\frac{-11\pm\sqrt{129}}{2}=-\frac{11}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{129}$$

$$\textit{afgerond}: x_{1,2}=-5{,}5\pm 5{,}7 \rightarrow x_1=-11{,}2 \quad \rightarrow y_1=\frac{-11{,}2-2}{-11{,}2+2}=1{,}43$$

$$x_2=0{,}2 \rightarrow y_1=\frac{0{,}2-2}{0{,}2+2}=-0{,}82$$

$$S1:(-11{,}2;\,1{,}43) \quad \textit{en} \quad S2:(0{,}2;-0{,}82)$$

d

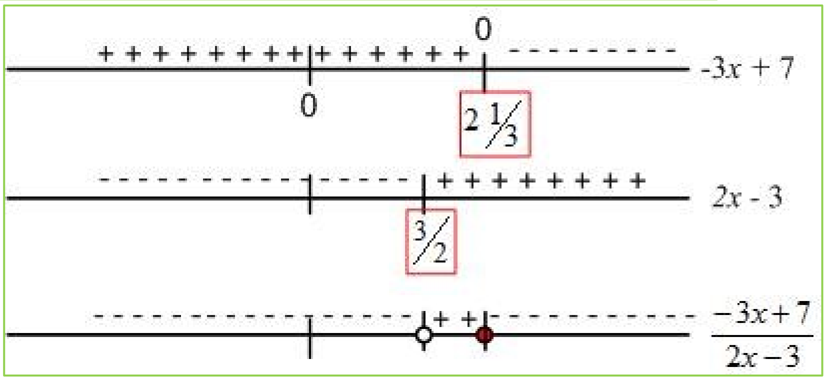


$$\frac{2x+3}{x-3} > 0 \quad als\ x < -1{,}5 \quad of \quad x > 3$$

e

$$\frac{x+1}{2x-3} \leq 2 \quad \rightarrow \frac{x+1}{2x-3} - 2 \leq 0 \rightarrow \frac{(x+1)-2(2x-3)}{2x-3} \leq 0$$

$$\rightarrow \frac{-3x+7}{2x-3} \leq 0 \quad x \neq 1{,}5$$



$$\frac{-3x+7}{2x-3} \leq 0 \quad als\ x > {}^3\!/_2 \quad en \quad x \leq 2\,{}^1\!/_3 \quad of\ {}^3\!/_2 < x \leq 2\,{}^1\!/_3$$

Opgave 3.8 **Snijpunten bepalen en ongelijkheden.**

tool 3.4

$f(x) = 2x + 2$
$g(x) = x - 3$
$h(x) = (2x + 2)(x - 3)$

$$k(x) = \frac{2x+2}{x-3}$$

a **A:** $f(x)$ rechte lijn met helling 2
B: $g(x)$ rechte lijn met helling 1
C: $k(x)$ hyperbool
D: $h(x)$ parabool met snijpunten (-1;0) en (3,0)

b Welke waarde heeft $k(x)$ als geldt: $f(x)=g(x)$

$$2x+2=x-3\rightarrow x=-5$$
$$k(-5)=\frac{(2\times -5)+2}{-5-3}=\frac{-8}{-8}=1$$
klopt met grafiek

c $h(-5)=(2\times -5+2)(-5-3)=-8\times -8=64$

d $n(x)=f(x)+g(x)\rightarrow n(x)=2x+2+(x-3)=3x-1$

Opgave 3.10 **Michaelus Menten**

a
$$v=\frac{\mathrm{v}_{\max}\cdot[s]}{[s]+\mathrm{k}_{\mathrm{m}}}\rightarrow\frac{1}{v}=\frac{[s]+\mathrm{k}_{\mathrm{m}}}{\mathrm{v}_{\max}\cdot[s]}\rightarrow\frac{1}{v}=\frac{[s]}{\mathrm{v}_{\max}\cdot[s]}+\frac{\mathrm{k}_{\mathrm{m}}}{\mathrm{v}_{\max}\cdot[s]}$$
$$\rightarrow\frac{1}{v}=\frac{1}{\mathrm{v}_{\max}}+\frac{\mathrm{k}_{\mathrm{m}}}{\mathrm{v}_{\max}\cdot[s]}\rightarrow\frac{1}{v}=\frac{1}{\mathrm{v}_{\max}}+\frac{\mathrm{k}_{\mathrm{m}}}{\mathrm{v}_{\max}}\cdot\frac{1}{[s]}$$

opmerking:

$$als\ a=b\quad dan\ ook\ \frac{1}{a}=\frac{1}{b}$$
$$en\quad \frac{p}{qs}=\frac{p}{q}\cdot\frac{1}{s}$$

b
$$\frac{1}{v}=\frac{1}{\mathrm{v}_{\max}}+\frac{\mathrm{k}_{\mathrm{m}}}{\mathrm{v}_{\max}}\cdot\frac{1}{[s]}\rightarrow y(x)=ax+b$$
$$y=\frac{1}{v}\quad x=\frac{1}{[s]}\quad a=\frac{\mathrm{k}_{\mathrm{m}}}{\mathrm{v}_{\max}}\quad en\quad b=\frac{1}{\mathrm{v}_{\max}}$$

c
$$y(0)=0,2\rightarrow\frac{1}{v_{\max}}=0,2\rightarrow v_{\max}=\frac{1}{0,2}=5\ \mu\mathrm{mol}/\mathrm{s}$$
$$a=\frac{(0,7-0,2)}{20}=0,025\rightarrow\frac{\mathrm{k}_{\mathrm{m}}}{\mathrm{v}_{\max}}=0,025\rightarrow\mathrm{k}_{\mathrm{m}}=0,025\times 5=0,125\ \mu\mathrm{mol}/\mathrm{L}$$

d
$$y=\frac{\mathrm{v}_{\max}\cdot x}{x+\mathrm{k}_{\mathrm{m}}}$$

e
$$y=\frac{\mathrm{v}_{\max}\cdot x}{x+\mathrm{k}_{\mathrm{m}}}=\frac{\frac{\mathrm{v}_{\max}\cdot x}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{\mathrm{k}_{\mathrm{m}}}{x}}=\frac{\mathrm{v}_{\max}}{1+\frac{\mathrm{k}_{\mathrm{m}}}{x}}$$

Als $x\rightarrow\infty$ dan y $\rightarrow \mathrm{v}_{\max}$

Als $x\uparrow -\mathrm{k}_{\mathrm{m}}$ dan y $\rightarrow -\infty$

Opgave 3.12 **Functievoorschrift samengestelde gebroken functies.**

tool 3.7

a

$$y=\frac{2}{x}+\frac{x-2}{x+1}\rightarrow y=\frac{2(x+1)+x(x-2)}{x(x+1)}=\frac{x^2+2}{x(x+1)}=\frac{x^2+2}{x^2+x}$$

$$verticale\ asymptoten: x=0\ en\ x=-1$$

$$y=\frac{x^2+2}{x^2+x}=\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}=\frac{1+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}$$

$$als\ x\rightarrow\pm\infty\ dan\ y\rightarrow 1$$

$$horizontale\ asymptoot: y=1$$

b

$$y=\frac{2}{x}\cdot\frac{(x-2)}{x+1}\rightarrow y=\frac{2x-4}{x^2+x}$$

$$verticale\ asymptoten: x=0\ en\ x=-1$$

$$y=\frac{2x-4}{x^2+x}=\frac{\frac{2x}{x^2}-\frac{4}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}=\frac{\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}$$

$$als\ x\rightarrow\pm\infty\ dan\ y\rightarrow 0$$

$$horizontale\ asymptoot: y=0$$

c

$$y=\frac{2x-1}{x-1}+\frac{x+3}{x+2}\rightarrow y=\frac{2x^2+5x-3}{x^2+x-2}$$

$$verticale\ asymptoten: x=1\ en\ x=-2$$

$$y=\frac{2x^2+5x-3}{x^2+x-2}=\frac{2+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}$$

$$als\ x\rightarrow\pm\infty\ dan\ y\rightarrow 2$$

$$horizontale\ asymptoot: y=2$$

d

$$y=\frac{2(x^2+2x+3)}{(x-2)(x+3)}\rightarrow vertcale\ asymptoten: x=2\ en\ x=-3$$

$$y=\frac{2x^2+4x+6}{x^2+x-6}=\frac{2+\frac{4}{x}+\frac{6}{x^2}}{1+\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}\rightarrow als\ x\rightarrow\pm\infty\ dan\ y\rightarrow 2$$

$$hor.\ asymptoot: y=2$$

Opgave 3.14 **Functievoorschrift $y = \dfrac{a}{x^n}$ en soortgelijk.**

In onderstaande figuur zijn de grafieken afgebeeld van

tool 3.9

C: $f(x)$ asymptoot $x = 0$ en $y(1) = 2$

D: $g(x)$ asymptoot $x = 0$ en $y(1) = 4$

A: $h(x)$ asymptoot $x = 2$ en als $x \to 2$ dan $y \to \infty$

B: $k(x)$ asymptoot $x = 2$ en als $x \to 2$ dan $y \to -\infty$