3 Gebroken functies

Opgave 3.1 **Functievoorschrift gebroken functie.**

tool 3.1

tool 3.2

a

$$y=\frac{1}{x}$$
$$\text{verticale asymptoot}: x=0$$
$$\text{als } x\to\pm\infty \text{ dan } y\to 0$$
$$\textit{horizontale asymptoot}: y=0$$

b

$$y=\frac{1}{x}+2\to y=\frac{1}{x}+\frac{2x}{x}=\frac{2x+1}{x}$$
$$\text{verticale asymptoot}: x=0$$
$$y=\frac{1}{x}+2$$
$$\text{als } x\to\pm\infty \text{ dan } y\to 2$$
$$\textit{horizontale asymptoot}: y=2$$

c

$$y=\frac{2}{x-2}+2\to y=\frac{2+2(x-2)}{x-2}=\frac{2x-2}{x-2}$$
$$\text{verticale asymptoot}: x=2$$
$$\text{als } x\to\pm\infty \text{ dan } y\to 2$$
$$\textit{horizontale asymptoot}: y=2$$

d

$$y=\frac{3x-2}{0{,}5x-1}$$
$$\text{verticale asymptoot}: 0{,}5x=1\to x=2$$
$$y=\frac{3x-2}{0{,}5x-1}=\frac{\frac{3x}{x}-\frac{2}{x}}{\frac{0{,}5x}{x}-\frac{1}{x}}=\frac{3-\frac{2}{x}}{0{,}5-\frac{1}{x}}$$
$$\text{als } x\to\pm\infty \text{ dan } y\to\frac{3}{0{,}5}=6$$
$$\textit{horizontale asymptoot}: y=6$$

e

$$y=\frac{0{,}5x+2{,}5}{-x-2}$$
$$\text{verticale asymptoot}: -x=2\to x=-2$$
$$y=\frac{0{,}5x+2{,}5}{-x-2}=\frac{\frac{0{,}5x}{x}+\frac{2{,}5}{x}}{\frac{-x}{x}-\frac{2}{x}}=\frac{0{,}5+\frac{2{,}5}{x}}{-1-\frac{2}{x}}$$
$$\text{als } x\to\pm\infty \text{ dan } y\to\frac{0{,}5}{-1}=-0{,}5$$
$$\textit{horizontale asymptoot}: y=-0{,}5$$

f

$$y=\frac{4x}{x+2}+4=\frac{4x+4(x+2)}{x+2}=\frac{8x+8}{x+2}$$
$$hor.\ asymptoot: x=-2$$
$$y=\frac{8+\frac{8}{x}}{1+\frac{2}{x}}\quad als\ x\to\pm\infty\ dan\ y\to 8$$
$$vert.\ asymptoot: y=8$$

g

$$y=\frac{4}{2-3x}+4=\frac{4+4(2-3x)}{2-3x}=\frac{-12x+12}{-3x+2}$$
$$hor.\ asymptoot: -3x=2\to x=-\frac{2}{3}$$
$$y=\frac{-12+\frac{12}{x}}{-3+\frac{2}{x}}\quad als\ x\to\pm\infty\ dan\ y\to 4$$
$$vert.\ asymptoot: y=4$$

h $y=\frac{3x+1}{4x+2}+1$

verticale asymptoot: $x=-\frac{1}{2}$

horizontale asymptoot: $y=1\frac{3}{4}$

i $y=\frac{4}{3x+6}+2$

verticale asymptoot: x = -2
horizontale asymptoot: $y=2$

Opgave 3.3 **Limieten**

Bepaal de volgende limieten.

tool 3.1

tool 3.2

a

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{4x-4}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{2x}{x}-\frac{3}{x}}{\frac{4x}{x}-\frac{4}{x}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2-\frac{3}{x}}{4-\frac{4}{x}}\right)=\frac{2}{4}=0,5$$

b

$$\lim_{x\uparrow 1,5}\left(\frac{2}{2x-3}+1\right)=\lim_{x\uparrow 1,5}\left(\frac{2x-1}{2x-3}\right)=-\infty$$

(2x – 3) < 0 en zeer klein en (2x – 1) >0

c

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x+3}{2x-3}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-1+\frac{3}{x}}{2-\frac{3}{x}}\right)=\frac{-1}{2}=-0,5$$

$$\frac{2+3}{4-5}=\frac{\frac{2}{4}+\frac{3}{4}}{\frac{4}{4}-\frac{5}{4}}=-5$$

Alle termen delen door x

d
$$\lim_{x \downarrow 2/3}\left(\frac{-2}{3x-2}-2\right)=\lim_{x \downarrow 2/3}\left(\frac{-2-2(3x-2)}{3x-2}\right)=\lim_{x \downarrow 2/3}\left(\frac{-6x+2}{3x-2}\right)=-\infty$$

(3x – 2) > 0 en zeer klein en (-6x +2) < 0

Opgave 3.5 **Bepaal functievoorschrift van de hyperbool.**

tool 3.1

a
$$y=\frac{-3x+b}{x-2}$$
$$1=\frac{-3\times 3+b}{3-2}\to 1=-9+b\to b=10$$
$$y=\frac{-3x+10}{x-2}$$

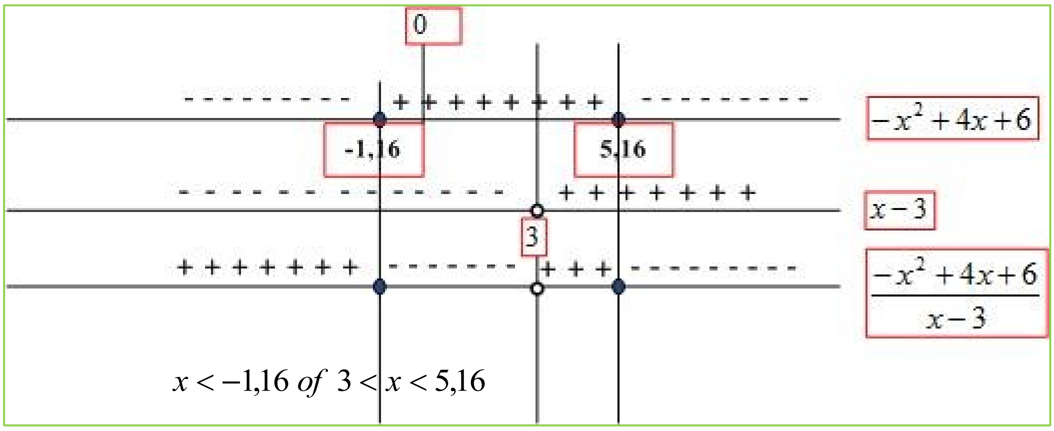
b
$$y=\frac{2x+b}{x+1}$$
$$3=\frac{2\times -4+b}{-4+1}\to -9=-8+b\to b=-1$$
$$y=\frac{2x-1}{x+1}$$

c
$$y=\frac{ax+b}{x-3}$$
$$3=\frac{a+b}{1-3}\to -6=a+b$$
$$1=\frac{5a+b}{5-3}\ \underline{\to 2=5a+b}\ -$$
$$-8=-4a$$
$$a=\frac{-8}{-4}=2\to b=-6-a=-8$$
$$y=\frac{2x-8}{x-3}$$

Opgave 3.7 **Snijpunten bepalen en ongelijkheden.**

tool 3.4

a
$$\frac{2x+3}{x-3}>x+1\to\frac{2x+3}{x-3}-(x+1)>0$$
$$\to\frac{2x+3-(x+1)(x-3)}{x-3}>0\to\frac{-x^2+4x+6}{x-3}>0\quad x\neq 3$$
We gaan tekenonderzoek doen van $(-x^2+4x+6)$
$$-x^2+4x+6=0\to x^2-4x-6=0$$
$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16+24}}{2}=2\pm\sqrt{10}\to \textit{afgerond}: x_{1,2}=2\pm 3{,}16$$



b

$$\frac{2x+2}{x-3}=\frac{x-2}{x+2} \qquad (x \neq 3 \text{ en } x \neq -2)$$
$$\rightarrow (2x+2)(x+2)=(x-2)(x-3) \rightarrow 2x^2+6x+4=x^2-5x+6$$
$$\rightarrow 2x^2+11x-2=0$$
$$\rightarrow x_{1,2}=\frac{-11\pm\sqrt{121+16}}{4}=-\frac{11}{4}\pm\frac{1}{4}\sqrt{137}$$
$$afgerond: x_{1,2}=-2{,}75\pm 2{,}93$$
$$x_1=-5{,}68 \rightarrow y_1=\frac{-5{,}68-2}{-5{,}68+2}=2{,}09$$
$$x_2=0{,}18 \rightarrow y_2=\frac{0{,}18-2}{0{,}18+2}=-0{,}83$$
$$snijpunten: S_1(-5{,}68;\, 2{,}09) \text{ en } S_2(0{,}18;\, -0{,}83)$$

c

$$\frac{3}{x}=\frac{1}{x+2} \rightarrow 3(x+2)=x \qquad (x \neq 0 \text{ en } x \neq -2)$$
$$\rightarrow 2x=-6 \rightarrow x=-3 \rightarrow y=\frac{3}{-3}=-1$$
$$snijpunt: \quad S(-3;\, -1)$$

Opgave 3.9 **Michaelis-Menten**

a

$$v=\frac{\mathrm{v}_{\max}\cdot[s]}{[s]+\mathrm{k_m}} \rightarrow y=\frac{100x}{x+0{,}5}$$

b asymptoten: horizontaal $y=100$

: verticaal $x = -0{,}5$

c x ofwel $[s]$ is een concentratie en die is altijd >0
y ofwel v is de omzetsnelheid van de enzymen en ook deze is altijd positief.

d

$$y=\frac{100x}{x+0{,}5} \rightarrow 50=\frac{100x}{x+0{,}5} \rightarrow 50(x+0{,}5)=50$$
$$\rightarrow 50x=25 \rightarrow x=0{,}5 \ \mathrm{\mu mol/L}$$

Men noemt dit de $\mathrm{k_m}$-waarde.

Opgave 3.11 **Gebroken functie in de optica.**

tool 3.5

a $\frac{1}{f}=\frac{1}{v}+\frac{1}{b}\rightarrow\frac{1}{b}=\frac{1}{10}-\frac{1}{v}\rightarrow\frac{1}{b}=\frac{v}{10v}-\frac{10}{10v}=\frac{v-10}{10v}$

$\rightarrow b=\frac{10v}{v-10}$

tool 3.6

b

c asymptoten: horizontaal : $b=10$

: verticaal $v=10$

d Als een voorwerp in het brandpunt van een positieve lens staat is de vergroting oneindig groot. Het beeld staat oneindig ver weg.

e zie antwoord vraag **d**

f Als $v\rightarrow\infty$ *dan* $b=10$

Het beeld wordt afgebeeld in het brandpunt en is even groot als het voorwerp.

Opgave 3.13 **Functievoorschrift** $y=\frac{a}{x^n}$ **en soortgelijk.**

tool 3.9

a $f(x)=2+\frac{1}{(x-1)^2}\rightarrow f(x)=\frac{2(x-1)^2+1}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-4x+3}{x^2-2x+1}$

$\textit{verticale asymptoot}: x=1$

$f(x)=\frac{2x^2-4x+3}{x^2-2x+1}=\frac{2-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}$

$\textit{als } x\rightarrow\pm\infty \textit{ dan } f(x)\rightarrow 2$

$\textit{horizontale asymptoot}: y=2$

b $f(x)=-3+\frac{2}{(x+2)^3}\rightarrow f(x)=\frac{-3(x+2)^3+2}{(x+2)^3}$

$(x+2)^3=(x+2)(x+2)^2=(x+2)(x^2+4x+4)=x^3+6x^2+12x+8$

$\rightarrow f(x)=\frac{-3(x^3+6x^2+12x+8)+2}{x^3+6x^2+12x+8}=\frac{-3x^3-18x^2-36x-22}{x^3+6x^2+12x+8}$

$\rightarrow f(x)=\frac{-3-\frac{18}{x}-\frac{36}{x^2}-\frac{22}{x^3}}{1+\frac{6}{x}+\frac{12}{x^2}+\frac{8}{x^3}}$

$\textit{verticale asymptoot}: x=-2$

$\textit{als } x\rightarrow\pm\infty \textit{ dan } y\rightarrow -3$

$\textit{horizontale asymptoot}: y=-3$

c $\boxed{f(x)=\frac{1}{x^4}\rightarrow g(x)=\frac{1}{(x+2)^4}-3}$

d $\boxed{y=\frac{1}{2(x-1,5)^3}+2,5}$

Opgave 3.15 **Geluidsintensiteit**

Voor de geluidsintensiteit $\boldsymbol{I}$ geldt dan: $I(x)=\frac{20}{4\pi\cdot x^2}$

a

$$I(x)=\frac{20}{4\pi\cdot x^2}=\frac{5}{\pi}\cdot\frac{1}{x^2}=1{,}59\cdot\frac{1}{x^2}$$

$$I(x)=k\cdot\frac{1}{x^2}\quad met\ k=\frac{5}{\pi}\ (afgerond: k=1{,}59)$$

$$\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}=eenheid\ van\ k\times\frac{1}{\mathrm{m}^2}\rightarrow eenheid\ k=\mathrm{W}$$

b De functie van $I(x)=k\cdot\frac{1}{(x+2)^2}$ geldt voor de geluidsintensiteit in een punt Q.

Punt **Q** ligt 2m verder dan punt **P.**

c Welk functievoorschrift geldt voor I als de geluidsbron 5x zoveel energie levert op een plaats die 3 meter dichter bij de bron ligt.

$\boxed{I(x)=5k\cdot\frac{1}{(x-3)^2}\quad x>3}$