

4. Machtsfuncties en wortelfuncties.

Opgave 4.1 Vermenigvuldigen en verschuiven.

a $g(x) = 2(x - 2)^4 + 4$

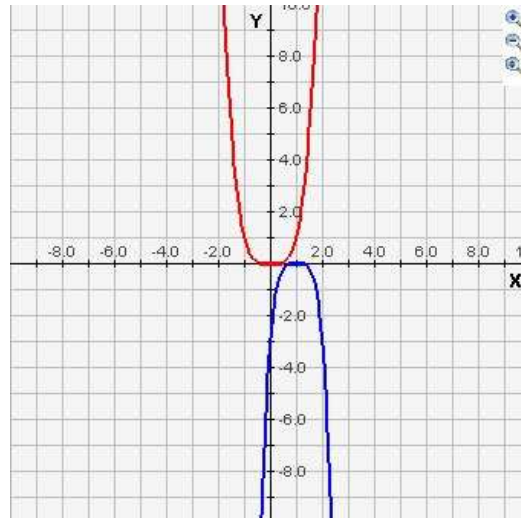
De grafiek is 2 schaaldelen naar rechts verschoven en de y-waardes zijn met 2 vermenigvuldigd, de grafiek is vervolgens 4 schaaldelen naar boven verschoven.

b $h(x) = (x + 1)^4 - 3$

De grafiek is 1 schaaldeel naar links en 3 schaaldelen naar beneden verschoven.

c $k(x) = -3(x - 1)^4$

De grafiek is 1 schaaldelen naar rechts verschoven. De y-waardes zijn met -3 vermenigvuldigd, de grafiek is dus verticaal met een factor 3 uitgerekt en gespiegeld t.o.v. de x-as (zie onderstaande figuur)



Opgave 4.2 Oefenen met haakjes.

Haakjes worden veel gebruikt bij algebraïsche formuleringen. Vaardigheid daarmee is nuttig, vooral als je gebruik gaat maken van computeralgebra.

Schrijf de volgende functies zonder haakjes.

a Voorbeeld:

$$(x - 1)^4 = ((x - 1)^2)^2 = (x^2 - 2x + 1)^2 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$$

Het onder elkaar schrijven kan een hulpmiddel zijn.

$$x^2 - 2x + 1$$

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + x^2 - 2x + 1} = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \quad g(x) &= 2(x^2 - 4x + 4)^2 + 4 = 2(x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16) \\ &\rightarrow g(x) = 2x^4 - 16x^3 + 48x^2 - 64x + 32 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(x) &= (x+1)^4 - 3 = (x+1)^2 \cdot (x+1)^2 - 3 = (x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2x + 1) - 3 \\ \mathbf{c} \quad &\rightarrow h(x) = x^2(x^2 + 2x + 1) + 2x(x^2 + 2x + 1) + 1(x^2 + 2x + 1) - 3 \\ &\rightarrow h(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + x^2 + 2x + 1 - 3 \\ &\rightarrow h(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d} \quad h(x) &= -3(x-1)^4 = -3(x-1)^2 \cdot (x-1)^2 = -3(x^2 - 2x + 1)(x^2 - 2x + 1) \\ &\rightarrow h(x) = -3x^2(x^2 - 2x + 1) + 6x(x^2 - 2x + 1) - 3(x^2 - 2x + 1) \\ &\rightarrow h(x) = -3x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 6x^3 - 12x^2 + 6x - 3x^2 + 6x - 3 \\ &\rightarrow h(x) = -3x^4 + 12x^3 - 18x^2 + 12x - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e} \quad m(x) &= (x-3)(x^2 + 2x - 3) \\ &\rightarrow m(x) = x(x^2 + 2x - 3) - 3(x^2 + 2x - 3) \\ &\rightarrow m(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 3x^2 - 6x + 9 \\ &\rightarrow h(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f} \quad n(x) &= (x^2 - 2)(x^2 + 2) \\ &\rightarrow n(x) = x^2(x^2 + 2) - 2(x^2 + 2) \\ &\rightarrow n(x) = x^4 + 2x^2 - 2x^2 - 4 \\ &\rightarrow n(x) = x^4 - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g} \quad p(x) &= 0,2x((x-2)^2 + 2x) \\ &\rightarrow p(x) = 0,2x(x^2 - 4x + 4 + 2x) = 0,2x(x^2 - 2x + 4) \\ &\rightarrow p(x) = 0,2x^3 - 0,4x^2 + 0,8x \end{aligned}$$

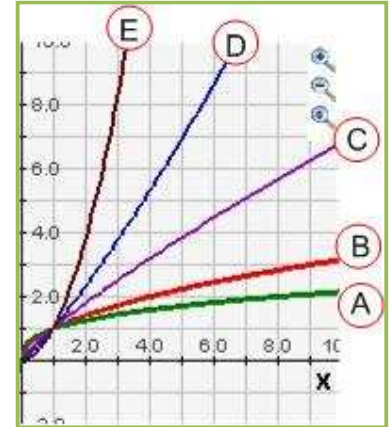
$$\begin{aligned} \mathbf{h} \quad q(x) &= (x-2)(x+3)(x-1)(-3x+1) \\ &\rightarrow q(x) = (x^2 + x - 6)(-3x^2 + 4x - 1) \\ &\rightarrow q(x) = x^2(-3x^2 + 4x - 1) + x(-3x^2 + 4x - 1) - 6(-3x^2 + 4x - 1) \\ &\rightarrow q(x) = -3x^4 + 4x^3 - x^2 - 3x^3 + 4x^2 - x + 18x^2 - 24x + 6 \\ &\rightarrow q(x) = -3x^4 + x^3 + 21x^2 + 6 \end{aligned}$$

Opgave 4.3

Grafieken met gebroken exponent herkennen.

In de figuur zijn de grafieken getekend van

$$f(x) = x^{\frac{6}{5}}$$
$$g(x) = x^{\frac{23}{12}}$$
$$h(x) = \sqrt[3]{x}$$
$$k(x) = x^{\frac{5}{6}}$$
$$m(x) = \sqrt{x}$$



- A:** $h(x) = \sqrt[3]{x}$ De exponent is <1 en $h(8) = 2$
B: $m(x) = \sqrt{x}$ De exponent is <1 en $h(4) = 2$
C: $k(x) = x^{\frac{5}{6}}$ De exponent is <1 maar groter dan bij A en B
D: $f(x) = x^{\frac{6}{5}}$ De exponent is >1
E: $g(x) = x^{\frac{23}{12}}$ De exponent is >1 en ongeveer 2

Opgave 4.4

Grafieken met gebroken exponent herkennen.

- A:** $f(x) = x$ rechte lijn met helling 1
B: $g(x) = x^{\frac{3}{2}}$ exponent >1 en $<\frac{5}{2}$
C: $g(x) = x^2$ $g(-1) = g(1)$
D: $g(x) = x^{\frac{5}{2}}$ exponent >2 en $x > 0$

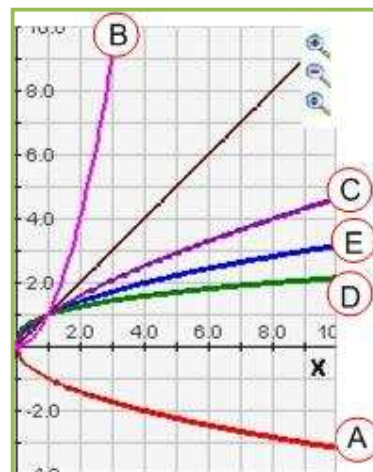
Opgave 4.5

Grafieken met gebroken exponent.

In de figuur zijn de grafieken getekend van

$$f(x) = x^{\frac{1}{5}}$$
$$g(x) = x^2$$
$$h(x) = \sqrt[3]{x^2}$$
$$k(x) = x^{\frac{1}{2}}$$
$$m(x) = -\sqrt{x}$$

voor $x \geq 0$



A : $m(x) = -\sqrt{x}$ De grafiek is gespiegeld t.o.v. \sqrt{x}

B : $g(x) = x^2$ $g(2) = 4$

C : $h(x) = \sqrt[3]{x^2}$ De exponent is <1 en $>0,5$

D : $f(x) = x^{\frac{1}{5}}$ De exponent is <1

E : $k(x) = x^{\frac{1}{2}}$ en $k(4) = 2$

Opgave 4.6

Machtsfuncties beschrijven.

a

$f(x) = x^3$ $x \in R$ puntspiegeling (0,0) afnemend stijgend / toenemend stijgend

b

$g(x) = 2 \cdot x^{\frac{3}{4}}$ $x \geq 0$ afnemend stijgend

c

$h(x) = x^{\frac{2}{3}}$ $x \geq 0$ afnemend stijgend

d

$k(x) = x^2$ $x \in R$ lijnspiegeling y -as afnemend dalend / toenemend stijgend

e

$l(x) = -0,5 \cdot x^{\frac{3}{2}}$ $x \geq 0$ toenemend dalend

f

$m(x) = (x-2)^{\frac{3}{4}}$ $x \geq 2$ afnemend stijgend

g

$n(x) = x^2 + 1$ $x \in R$

lijnspiegeling y -as afnemend dalend / toenemend stijgend

Opgave 4.7

Machtsfuncties samenstellen.

$f(x) = x^2$; $g(x) = x^{\frac{1}{2}}$; $h(x) = x^3$; $k(x) = x^4$

a $u(x) = (x^2)^2 = x^4$ $-\infty < x < \infty$

b $v(x) = (x^{\frac{1}{2}})^4 = x^2$ $x \geq 0$

c $w(x) = x^4 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{4,5}$ $x \geq 0$

d $p(x) = \frac{x^4}{x^2} \cdot x^3 = x^5$ $-\infty < x < \infty$

e $v(x) = \frac{x^3}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{2,5}$ $x \geq 0$

$$\text{f } w(x) = \frac{x^4}{x^3} = x \quad \{x \in R\}$$

Opgave 4.8

Schrijf zo eenvoudig mogelijk.

$$\text{a } \frac{(p^{\frac{1}{5}})^3 \cdot p^2}{p^{\frac{2}{3}}} = p^{\frac{3}{5}} \cdot p^2 \cdot p^{-\frac{2}{3}} = p^{(\frac{9}{15} + \frac{30}{15} - \frac{10}{15})} = p^{\frac{29}{15}}$$

$$\text{b } \frac{(x^{-3} \cdot y^2)^{\frac{1}{3}} \cdot y^2}{\sqrt{y}} = \frac{x^{-1} \cdot y^{\frac{2}{3}} \cdot y^2}{y^{\frac{1}{2}}} = x \cdot y^{(-\frac{8}{12} + \frac{24}{12} - \frac{6}{12})} = x \cdot y^{\frac{5}{6}}$$

$$\text{c } \left(\frac{a\sqrt{b}}{b\sqrt{a}} \right)^{-3} = \left(\frac{a \cdot b^{\frac{1}{2}}}{b \cdot a^{\frac{1}{2}}} \right)^{-3} = \left(a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{-\frac{1}{2}} \right)^{-3} = a^{-\frac{3}{2}} \cdot b^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{d } \frac{x^{\frac{1}{6}} y^{\frac{3}{4}}}{(y^{\frac{2}{3}} x^2)^{-3}} = x^{\frac{1}{6}} \cdot y^{\frac{3}{4}} \cdot y^2 \cdot x^{-\frac{3}{2}} = x^{\frac{4}{3}} \cdot y^{\frac{5}{4}}$$

Opgave 4.9

Schrijf als één macht van x.

$$\text{a } \frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} = x^{-1} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{b } x \cdot \sqrt[5]{x^2} = x^1 \cdot x^{\frac{2}{5}} = x^{1,4}$$

$$\text{c } \sqrt{\frac{1}{x^7}} = \frac{1}{\sqrt{x^7}} = \frac{1}{x^{\frac{7}{2}}} = x^{-\frac{7}{2}} \qquad \text{d } \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x^2}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{\frac{5}{3}}$$

$$\text{e } \frac{\sqrt[3]{x \cdot \sqrt[3]{x}}}{x^2} = \frac{(x^1 \cdot x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{3}}}{x^2} = \frac{(x^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{3}}}{x^2} = \frac{x^{\frac{4}{9}}}{x^2} = x^{\frac{4}{9}-2} = x^{-\frac{14}{9}}$$

$$\text{f } \frac{\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[5]{x}}{x^3} = \frac{x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{1}{5}}}{x^3} = x^{\frac{1}{4} + \frac{1}{5} - 3} = x^{-2,55}$$

Opgave 4.10

Grafieken herkennen.

A: $f(x) = x^{0,1}$ exponent veel kleiner dan 1

B: $g(x) = x^{0,9}$ exponent iets kleiner dan 1

C: $h(x) = x^{1,1}$ exponent iets groter dan 1

D: $k(x) = x^{1,9}$ exponent iets kleiner dan 2

Opgave 4.11 Machtsfuncties samenstellen.

$$f(x) = x^{0,4} ; g(x) = x^2 ; h(x) = x^{1,7} ; k(x) = x^{1,5}$$

a $u(x) = (x^{0,4})^2 = x^{0,8} \quad x \geq 0$

b $v(x) = (x^2)^4 = x^8 \quad x \in R$

c $w(x) = x^{1,5} \cdot x^2 = x^{3,5} \quad x \geq 0$

d $p(x) = \frac{x^{1,5}}{x^{0,4}} \cdot x^{1,7} = x^{2,8} \quad x \geq 0$

e $v(x) = \frac{x^{1,7}}{x^2} = x^{-0,3} \quad x \geq 0$

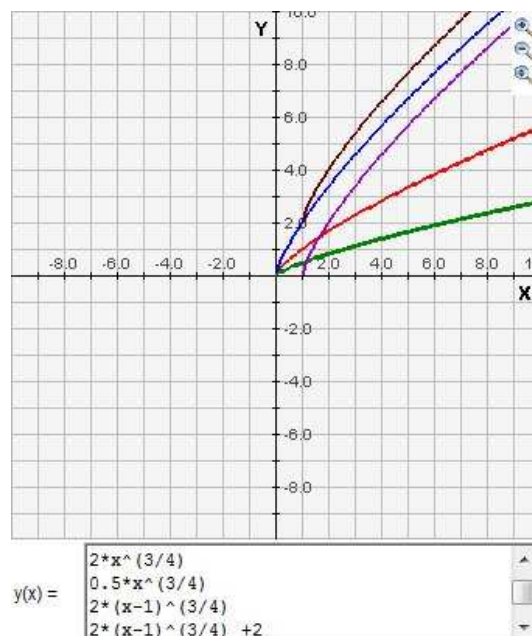
f $w(x) = \frac{k(x)}{h(x)} = \frac{x^{1,5}}{x^{1,7}} = x^{-0,2} \quad x \geq 0$

Opgave 4.12 Toepassing van een machtsfunctie

a $S = k \cdot G^{-\frac{1}{4}} \rightarrow S = 241 \times 4000^{-\frac{1}{4}} = 30 \text{ spm}$

b $S = k \cdot G^{-\frac{1}{4}} \rightarrow 60 = 241 \times G^{-\frac{1}{4}}$
 $\rightarrow G^{-\frac{1}{4}} = \frac{60}{241} = 0,25$
links en rechts tot de macht 4
 $\rightarrow (G^{-\frac{1}{4}})^4 = (0,25)^4 \rightarrow G^{-1} = 0,0039 \rightarrow G = \frac{1}{0,0039} = 256 \text{ kg}$

Opgave 4.13 Schets de grafiek van de gegeven functies.



- a $g(x) = 2 \cdot x^{\frac{3}{4}}$ tweede van boven
 b $h(x) = 0,5 \cdot x^{\frac{3}{4}}$ onderste
 c $k(x) = 2 \cdot (x-1)^{\frac{3}{4}}$ middelste $x \geq 1$
 d $m(x) = 2 \cdot (x-1)^{\frac{3}{4}} + 2$ bovenste $x \geq 1$

Opgave 4.14

Snijpunten en ongelijkheden met wortelfuncties.

Voor welke waarden van x geldt:

a

$$2\sqrt{x} + 4 = x \rightarrow 2\sqrt{x} = x - 4 \rightarrow 4x = (x - 4)^2$$

$$\rightarrow 4x = x^2 - 8x + 16 \rightarrow x^2 - 12x + 16 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \times 1 \times 16}}{2} = 6 \pm \frac{1}{2} \sqrt{80} = 6 \pm 2\sqrt{5}$$

$$x_1 = 6 - 2\sqrt{5} \rightarrow x_1 \approx 1,53$$

$$x_2 = 6 + 2\sqrt{5} \rightarrow x_2 \approx 10,5$$

controle:

$$2\sqrt{1,53} + 4 \neq 1,53 \quad x_1 \text{ kan niet}$$

$$2\sqrt{10,5} + 4 = 10,5 \quad \text{klopt}$$

Door het kwadrateren is er een foute oplossing bijgekomen. Deze kun je opsporen door de gevonden waarden in te vullen.

b

$$2\sqrt{x+4} > x \quad x \geq -4$$

$$\rightarrow 4(x+4) > x^2 \rightarrow x^2 - 4x - 16 < 0 \text{ dalparabool}$$

$$\rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 + 64}}{2}$$

$$\rightarrow x_{1,2} = 2 \pm \frac{1}{2} \sqrt{80} = 2 \pm 2\sqrt{5}$$

afgerond:

$$x_1 = 2 + 4,47 = 6,47 \quad \text{en} \quad x_2 = 2 - 4,47 = -2,47$$

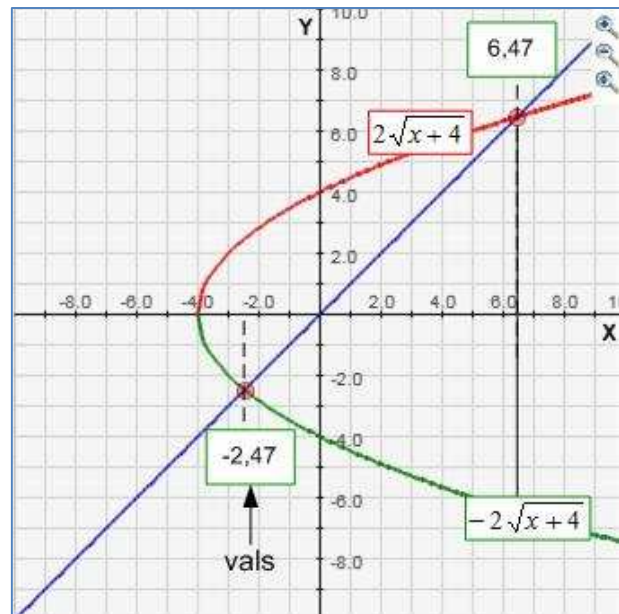
$x < -2,47$ of $x > 6,47$

controle:

$$2\sqrt{10,47} = 6,47 \quad \text{klopt}$$

$$2\sqrt{1,53} = 2,47 \quad \text{klopt niet}$$

Dus $x \geq -4$



$$\sqrt{x-2} > x-4 \quad x \geq 2$$

c $x-2 > (x-4)^2 \rightarrow x-2 > x^2 - 8x + 16 \rightarrow x^2 - 9x + 18 < 0$
dalparabool

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-72}}{2} = \frac{9 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = 3 \quad \text{en} \quad x_2 = 6$$

controle: $\sqrt{3-2} = 1$ vals $\sqrt{6-2} = 2$ goed

Dus: $x \geq 2$

d

$$\sqrt{x-2} > x-4 \quad x \geq 2$$

$$x-2 > (x-4)^2 \rightarrow x-2 > x^2 - 8x + 16 \rightarrow x^2 - 9x + 18 < 0$$

dalparabool

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-72}}{2} = \frac{9 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = 3 \quad \text{en} \quad x_2 = 6$$

controle: $\sqrt{3-2} = 1$ vals $\sqrt{6-2} = 2$ goed

Dus: $x \geq 2$

Opgave 4.16

Verschuiven en vermenigvuldigen van wortelfuncties.

a $g(x) = \sqrt{x+2}$ 2 schaaldelen verschoven naar links $x \geq -2$

b $h(x) = \sqrt{x} + 2$ 2 schaaldelen verschoven naar boven $x \geq 0$

c $k(x) = 2\sqrt{x+2}$ $2 \times g(x)$

d $h(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{2}$ $0,5 \times h(x)$

e $k(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{2}$ $0,5 \times g(x)$

f $m(x) = 2(\sqrt{x} + 2)$ $2 \times h(x)$

g $n(x) = \sqrt{\sqrt{x}}$ $\sqrt{f(x)}$
 $n(x) = x^{\frac{1}{4}}$

f $p(x) = 2(\sqrt{x-2}) + 2$ 2 schaaldelen verschoven naar rechts,
 vervolgens y -waardes $\times 2$ en vervolgens 2 schaaldelen naar boven.
 $x \geq 2$

Opgave 4.17

Modulusstrepen gebruiken.



1.3

Controleer de juistheid met applet 1.3.

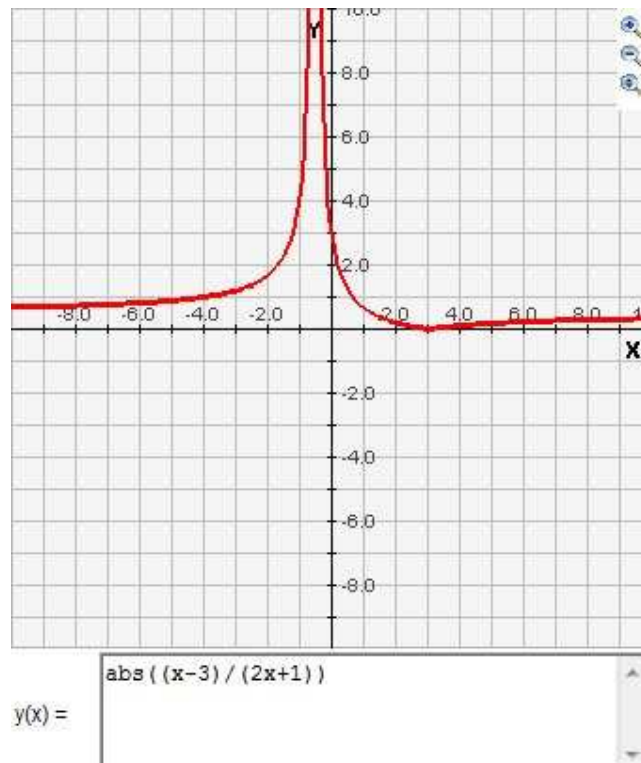
Geef de functievoorschriften voor het hele domein \mathbb{R} zonder modulusstrepen

a $f(x) = |x-3| \rightarrow f(x) = x-3$ als $x \geq 3$
 $\rightarrow f(x) = -(x-3) = -x+3$ als $x \leq 3$

b $f(x) = \sqrt{(1-x)^2} \rightarrow f(x) = |1-x| \rightarrow f(x) = 1-x$ als $x \leq 1$
 $\rightarrow f(x) = -(1-x) = -1+x$ als $x \geq 1$

c $f(x) = \frac{1}{|x+1|} \rightarrow f(x) = \frac{1}{x+1}$ als $x > -1$ ($x \neq -1$)
 $\rightarrow f(x) = \frac{1}{-x-1}$ als $x < -1$

d $f(x) = \frac{|x-3|}{|2x+1|} \rightarrow f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$ als $x \geq 3$
 $\rightarrow f(x) = \frac{-(x-3)}{2x+1} = \frac{-x+3}{2x+1}$ als $x \leq 3$ en $x > -0,5$
 $\rightarrow f(x) = \frac{-(x-3)}{-(2x+1)} = \frac{x-3}{2x+1}$ als $x < -0,5$



Opgave 4.18**Polynomen**

a $2x^3 - 4x^2 + 2x = 0$
 $\rightarrow x(2x^2 - 4x + 2) = 0$
 $\rightarrow x = 0$ of $2x^2 - 4x + 2 = 0$
 $\rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow (x-1)^2 = 0$
nulpunten : $x_1 = 0$ en $x_2 = 1$ (*raakpunt*)

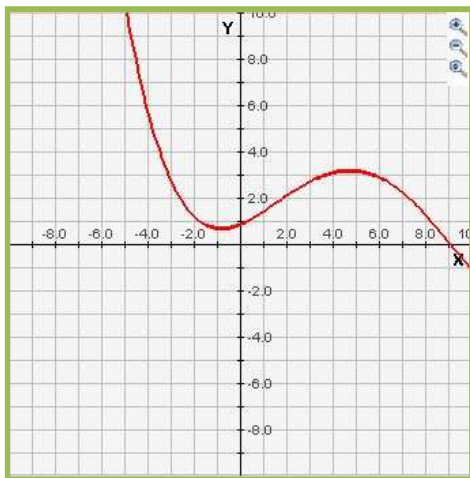
b $2(x-1)(x+2)(x+3) = 0$
nulpunten : $x_1 = 1$; $x_2 = -2$; $x_3 = -3$

c $g(0) = 2 \times -1 \times 2 \times 3 = -12$
snijpunt y-as : $(0; -12)$

d In onderstaande figuur is met de applet [1.3](#) de grafiek getekend met het functievoorschrift, verkregen via polynomische regressie met Excel in het voorbeeld hiervoor.

$$y = 0,0021x^4 - 0,0458x^3 + 0,1879x^2 + 0,4058x + 0,87$$

Verklaar het verschil met de grafiek in Excel!



De Excel-grafiek is getekend voor het domein $[1,5]$

Opgave 4.19

Inverse van parabool is wortel of andersom.

a $y = 2x + 3 \rightarrow x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}$
 $y^{-1} = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

b $y = (x+1)^2 \rightarrow x+1 = \sqrt{y} \rightarrow x = \sqrt{y} - 1$
 $y^{-1} = \sqrt{x} - 1 \quad x \geq 0$

c $y = \sqrt{x+2} \rightarrow y^2 = x+2 \rightarrow x = y^2 - 2 \quad x \geq -2$
 $y^{-1} = x^2 - 2$

d $y = \frac{1}{x+1} \rightarrow y(x+1) = 1 \rightarrow yx + y = 1 \rightarrow yx = 1 - y \rightarrow x = \frac{1-y}{y}$
 $y^{-1} = \frac{1-x}{x} \quad x \neq 0$