

5 Exponentiële functies en logaritmische functies

Opgave 5.2

Onderzoek naar de betekenis van de exponent.

tool 5.2



$$\text{a } h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = (2^{-1})^x = 2^{-x} \rightarrow h(2) = 2^{-2} \text{ en ook } h(-x) = 2^{-(-x)} = 2^x \\ \rightarrow h(-x) = f(x) \text{ ofwel } h(-1) = f(1)$$

De grafiek van $f(x)$ (A) en de grafiek van $h(x)$ (D) zijn gespiegeld t.o.v. de y-as.

$$\text{b } f(x) : \text{A} \quad f(1) = 2 \\ g(x) : \text{B} \quad g(1) = 7 \\ h(x) : \text{D} \quad h(1) = \frac{1}{2} \\ k(x) : \text{C} \quad k(1) = \frac{1}{7}$$

$$\text{c } h(x) > k(x) \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{7}\right)^x \text{ als } x > 0$$

$$\text{d } f(x) = 3 \\ 2^x = 3 \rightarrow x = {}^2\log(3) \text{ exact } \quad x = \frac{\log(3)}{\log(2)} = 1,58 \text{ afgerond}$$

x is de exponent die bij het grondtal 2 de waarde 3 oplevert wiskundig :

$$x = {}^2\log(3) \text{ of } 2^{{}^2\log(3)} = 3$$

$$\text{e } \frac{g(x)}{f(x)} = 2 \rightarrow \frac{7^x}{2^x} = 2 \rightarrow 3,5^x = 2 \\ x = {}^{3,5}\log(2) \text{ exact } \quad x = \frac{\log(2)}{\log(3,5)} = 0,55 \text{ afgerond}$$

$$\text{f } \frac{1}{k(x)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{7}\right)^x} = \frac{1}{7^{-x}} = 7^x$$

Opgave 5.4**Kapitaalgroei berekenen.**

tool 5.4



a

$$K_A = 1200 \cdot (1,05)^x$$

$$K_B = 1000 \cdot (1,07)^x$$

$$1200 \cdot (1,05)^x = 1000 \cdot (1,07)^x \rightarrow \frac{1200}{1000} = \frac{1,07^x}{1,05^x}$$

$$\rightarrow 1,2 = \left(\frac{1,07}{1,05}\right)^x \rightarrow 1,019^x = 1,2 \rightarrow x = \frac{\log(1,2)}{\log(1,019)} = 9,7$$

Na 9,7 jaar is het kapitaal van A gelijk aan dat van B

$$b \quad K_A - K_B = 1200 \cdot (1,05)^6 - 1000 \cdot (1,07)^6 = 1608 - 1501 = 107$$

c -tool 5.4

Opgave 5.6**Herleiden van de exponent.**

tool 5.7



$$a \quad \text{bij } \Delta x = 1 \text{ is factor } \times 3 \quad y(0) = 1$$

$$y = 1 \cdot 3^x = 3^x$$

$$b \quad \text{bij } \Delta x = 1 \text{ is factor } \times 4 \quad y(0) = 2$$

$$y = 2 \cdot 4^x$$

$$c \quad \text{bij } \Delta x = 1 \text{ is factor } \times 0,5 \quad y(0) = 120$$

$$y = 120 \cdot (0,5)^x$$

Opgave 5.8**Onderzoek exponentiële grafieken.**

tool 5.9



In onderstaande grafiek zijn 4 exponentiële grafieken getekend.

$$f(x) = 1,5^x \quad \text{grafiek B} \quad f(1) = 1,5$$

$$g(x) = 2 \times 1,5^x \quad \text{grafiek C} \quad g(x) = 2 \times f(x)$$

$$h(x) = 3^x \quad \text{grafiek D} \quad f(1) = +3$$

$$k(x) = -1,5^x \quad \text{grafiek A} \quad f(1) = -1,5$$

Opgave 5.10**Exponentiële functie met verschillende grondtallen.**

tool 5.10



$$f(x) = 2^x$$

$$2 = 0,5^a = 2^{-a} \rightarrow a = -1$$

$$2^x = (0,5^{-1})^x = 0,5^{-x}$$

$$2 = 1,5^a \rightarrow a = \frac{\log(2)}{\log(1,5)} = 1,71 \rightarrow 2 = 1,5^{1,71}$$

$$2^x = (1,5^{1,71})^x = 1,5^{1,71x}$$

$$\text{of exact } 2 = 1,5^{1,5 \log(2)} \rightarrow 2^x = 1,5^{x \cdot 1,5 \log(2)}$$

$$2 = 4^a \rightarrow a = 0,5 \rightarrow 2 = 4^{0,5}$$

$$2^x = (4^{0,5})^x = 4^{0,5x}$$

$$2 = 10^a \rightarrow a = \log(2) \rightarrow 2 = 10^{0,30}$$

$$2^x = (10^{0,30})^x = 10^{0,3x}$$

$$\text{of exact } 2 = 10^{\log(2)} \rightarrow 2^x = 10^{x \cdot \log(2)}$$

$$2 = 100^a \rightarrow a = \frac{1}{100} \log(2) \rightarrow 2 = 100^{0,151}$$

$$2^x = (100^{0,151})^x = 100^{0,151x}$$

$$\text{of exact } 2 = 100^{\frac{1}{100} \log(2)} \rightarrow 2^x = 100^{x \cdot \frac{1}{100} \log(2)}$$

Opgave 5.12

pH-waarde is een exponent.

a

$$f(2) = 10^{-2} \text{ mol/L}$$

$$g(2) = 10^{(2-14)} = 10^{-12} \text{ mol/L}$$

b

$$0,005 = 10^{-x} \rightarrow -x = \log(0,005) \rightarrow x = -\log(0,005)$$

afgerond : $x = 2,30$

c

als $x = 8$ dan $f(x) = 10^{-8}$
als $x > 7$ dan $f(x) < 10^{-7}$

Opgave 5.14

Logaritmische grafieken.

tool 5.12



a

$$\log(x) : \text{grafiek A want } \log(x) = 1 \text{ als } x = 10$$

$$\log(2x) : \text{grafiek B want } \log(2x) = 1 \text{ als } x = 5$$

$$\log(2x + 2) : \text{grafiek C want } 2x + 2 > 0 \rightarrow x > -1$$

b

$$\log(x) : \text{grafiek C want } \log(x) = 1 \text{ als } x = 10$$

$${}^2\log(x) : \text{grafiek A want } {}^2\log(x) = 1 \text{ als } x = 2$$

$${}^4\log(x) : \text{grafiek B want } {}^4\log(x) = 1 \text{ als } x = 4$$

c

$$\log(x) : \text{grafiek C want } \log(x) = 1 \text{ als } x = 10$$

$$\log(x^2) : \text{grafiek A want } \log(x^2) = 2 \times \log(x) \text{ en } \log(x^2) = \log((-x)^2)$$

$$\log(x^3) : \text{grafiek B want } \log(x^3) = 3 \times \log(x)$$

d $\log(x)$: grafiek C want $\log(x) = 1$ als $x = 10$
 $\log(x^5)$: grafiek A want $\log(x^5) = 5 \times \log(x)$
 $3 \log(x)$: grafiek B want $3 \log(x) = 3$ als $x = 10$

e $\log(x)$: grafiek A want $\log(x) = 1$ als $x = 10$
 $\log(x^{-3})$: grafiek C want $\log(x^{-3}) = -3 \times \log(x)$
 $-2 \log(x)$: grafiek B want $-2 \log(x) = -2$ als $x = 10$

Opgave 5.16 Grafiek van $E = -\log(T)$

a $T = 10^{-E} \rightarrow$
 $0,1 = 10^{-E} \rightarrow 10^{-1} = 10^{-E} \rightarrow E = 1$

b $E = 0,210$
 $T = 10^{-0,210} = 0,616$ of $T = 61,6\%$

c $E = k \cdot c$
als $c = 10 \text{ mmol/L}$ dan $E = 0,210$
als $c = 5 \text{ mmol/L}$ dan $E = 0,105 \rightarrow T = 10^{-0,105} = 0,785$ of $78,5\%$

d Het meetgebied $0,2 < E < 0,6$ is het meest geschikt omdat de transmissie hierbij een waarde heeft tussen $10^{-0,2} = 0,63$ en $10^{-0,6} = 0,25$, ofwel tussen 63% en 25%. Bij zeer lage en zeer hoge waarden van T is E niet evenredig met de concentratie.

Opgave 5.18 e als grondtal van de exponentiële functie.

a $100 = e^a \rightarrow a = \log(100) = \ln(100)$
 $100 = e^{\ln(100)}$ afgerond : $100 = e^{4,61}$

desmostool b $2 = e^{\ln(2)}$ afgerond : $2 = e^{0,693}$

c $e = e^1$

d $1 = e^0$

e $y(x) = 2^x$
 $2 = e^{\ln(2)} \rightarrow y = 2^x \rightarrow y = (e^{\ln(2)})^x = e^{x \cdot \ln(2)}$
afgerond : $y = e^{0,693 \cdot x}$

f $N(t) = N(0) \cdot (0,5)^t$
 $0,5 = e^{\ln(0,5)} \rightarrow N(t) = N(0) \cdot (e^{\ln(0,5)})^t = N(0) \cdot e^{t \cdot \ln(0,5)}$
afgerond : $N(t) = N(0) \cdot e^{-0,693t}$

g $m(t) = 100 \cdot (2)^{-0,25t}$
 $2 = e^{\ln(2)} \rightarrow m(t) = 100 \cdot (e^{\ln(2)})^{-0,25t} = 100 \cdot e^{-0,25t \cdot \ln(2)}$
afgerond : $m(t) = 100 \cdot e^{-0,173t}$

h $y = e^{2x}$
 $\ln(y) = 2x \rightarrow x = 0,5 \cdot \ln(y)$
 $y^{-1} = 0,5 \cdot \ln(x) \quad x > 0$

Opgave 5.20

Ongelijkheden met exponentiële functies.

tool 5.13



Voor welke waarde van x geldt:

a $3^{x-2} > \frac{1}{9}$
 $\rightarrow 3^{x-2} > 3^{-2} \rightarrow x-2 > -2 \rightarrow x > 0$

b $2^{x+4} \geq 5^x$
 $5 = 2^a \rightarrow a = {}^2\log(5) \rightarrow 5 = 2^{2\log(5)}$
 $2^{x+4} \geq (2^{2\log(5)})^x \rightarrow x+4 \geq x \cdot 2\log(5)$
 $\rightarrow x(1 - 2\log(5)) \geq -4$
 $\rightarrow x \geq \frac{4}{2\log(5) - 1}$

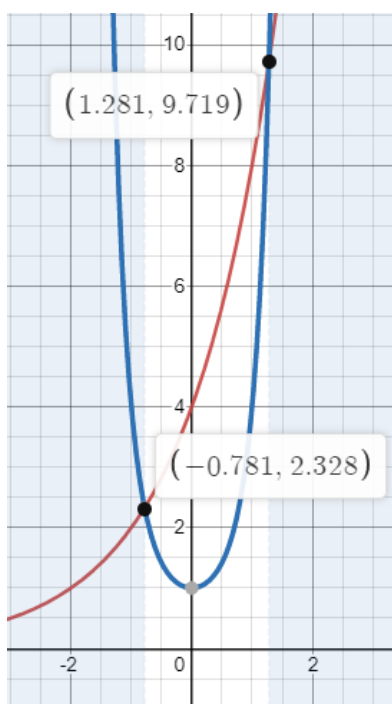
Met afronding:

$2^{x+4} \geq 5^x$
 $5 = 2^a \rightarrow a = {}^2\log(5) \rightarrow 5 = 2^{2,32}$
 $2^{x+4} \geq (2^{2,32})^x \rightarrow x+4 \geq 2,32x$
 $\rightarrow x(1 - 2,32) \geq -4 \rightarrow -1,32x \geq -4$
 $\rightarrow x \leq \frac{-4}{-1,32} \rightarrow x \leq 3,03$

c $2^{x+2} < 4^{x^2}$
 $2^{x+2} < 2^{2x^2} \rightarrow x+2 < 2x^2 \rightarrow 0 < 2x^2 - x - 2$
 $2x^2 - x - 2 > 0 \quad D = b^2 - 4ac = 17$
 $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4} = \frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{17}$
afgerond : $x_{1,2} = 0,25 \pm 1,03 \rightarrow x_1 = -0,78$ en $x_2 = 1,28$

$2x^2 - x - 2$ is een dalparabool met snijpunten -0,78 en 1,28

$2x^2 - x - 2 > 0$ als $x < -0,78 \vee x > 1,28$



d $2^{-x} \geq 2^{x^2-2}$
 $-x \geq x^2 - 2 \rightarrow 0 \geq x^2 + x - 2 \rightarrow x^2 + x - 2 \geq 0$
 $D = b^2 - 4ac = 9$
 $x_{1,2} = \frac{-b \pm D}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \rightarrow x_1 = -2 \text{ en } x_2 = 1$
dalparabool dus $x < -2 \vee x > 1$

e
met afronding :
 $5^{2x} < 3^{-x+4}$
 $3 = 5^a \rightarrow a = {}^5 \log(3) = 0,683 \rightarrow 3 = 5^{0,683}$
 $5^{2x} < (5^{0,683})^{-x+4}$
 $\rightarrow 2x < 0,683(-x + 4) \rightarrow 2x < -0,683x + 2,73$
 $\rightarrow 2,683x < 2,73 \rightarrow x < \frac{2,73}{2,683} \rightarrow x < 1,02$

