5 Exponentiële functies en logaritmische functies

Opgave 5.1 **Basisberekeningen met logaritmen**

a
$$4^x = 8 \rightarrow x={}^4\log(8)$$
$$afgerond: x == \frac{\log(8)}{\log(4)} = \frac{0{,}903}{0{,}602} = 1{,}50$$

b
$$1{,}4^a = 10 \rightarrow exact: a={}^{1,4}\log(10)$$
$$afgerond: a == \frac{\log(10)}{\log(1{,}4)} = \frac{1}{0{,}146} = 6{,}84$$

c
$$0{,}0001 = 10^{-4}$$

d
$$2^x = 1000 \rightarrow x={}^2\log(1000)$$
$$exact: 2^{{}^2\log(1000)} = 1000$$
$$afgerond:$$
$${}^2\log(1000) = \frac{\log(1000)}{\log(2)} = \frac{3}{0{,}301} = 9{,}97 \rightarrow 2^{9,97} = 1000$$

$\log(2) = 0{,}301$; $\log(3) = 0{,}477$

e
$$\log(16) = \log(2^4) = 4\log(2) = 4\times 0{,}301 = 1{,}204$$
$$\log(0{,}03) = \log(3) - \log(100) = 0{,}477 - 2 = -1{,}523$$
$$\log(6\cdot 10^{-6}) = \log(6) + \log(10^{-6}) = \log(2) + \log(3) - 6 = -5{,}222$$

f
$$\log(3^5) = 5\log(3) = 5\times 0{,}477 = 2{,}385$$
$$\log(2^4\cdot 3^{-4}) = 4\log(2) - 4\log(3) = 4\times 0{,}301 - 4\times -0{,}477 = -0{,}704$$
$$\log(12\cdot 10^5) = \log(12) + \log(10^5) = 2\log(2) + \log(3) + 5 = 6{,}079$$

g
$${}^2\log(3)={}^4\log(9)={}^{\sqrt{2}}\log(\sqrt{3})={}^8\log(27)$$
$${}^4\log(9) = \frac{\log(9)}{\log(4)} = \frac{\log(3^2)}{\log(2^2)} = \frac{2\log(3)}{2\log(2)} = \frac{\log(3)}{\log(2)}={}^2\log(3)$$
$${}^{\sqrt{2}}\log(\sqrt{3}) = \frac{\log(3^{\frac{1}{2}})}{\log(2^{\frac{1}{2}})} = \frac{\frac{1}{2}\log(3)}{\frac{1}{2}\log(2)} = \frac{\log(3)}{\log(2)}={}^2\log(3)$$
$${}^8\log(27) = \frac{\log(27)}{\log(8)} = \frac{\log(3^3)}{\log(2^3)} = \frac{3\log(3)}{3\log(2)} = \frac{\log(3)}{\log(2)}={}^2\log(3)$$

h $4^{{}^{4}\log(3)} = 3$

$2^{{}^{2}\log(5)} = 5$

oefenen 5.1

Extra oefenmateriaal site Herman Hofstede

Opgave 5.3 **Herleiden van de exponent.**

tool 5.3

a $f(x) = 3^{x+1} = 3^x \cdot 3^1 = 3 \cdot 3^x$

b $g(x) = 2^{x-2} = 2^x \cdot 2^{-2} = \dfrac{1}{4} \cdot 2^x$

c $g(x) = 4^{2x} = (4^2)^x = 16^x$

d $k(x) = 3^{2x+4} = (3)^{2x} \cdot 3^4 = (3^2)^x .3^4 = 9^x \cdot 81 = 81 \cdot 9^x$

e $l(x) = 5^{x-1} = 5^x \cdot 5^{-1} = \dfrac{1}{5}.5^x$

f $m(x) = 9^{\frac{1}{2}x} = (9^{\frac{1}{2}})^x = ((3^2)^{\frac{1}{2}})^x = 3^x$

g $n(x) = 6^{-x} = (6^{-1})^x = (\dfrac{1}{6})^x$

h $p(x) = b^{x+a} = b^a \cdot b^x$

Opgave 5.5 **Afkoelcurve.**

Dus $\Delta T\,(0) = 40\ {}^0\mathrm{C}$, $\Delta T\,(1) = 20\ {}^0\mathrm{C}$, $\Delta T\,(2) = 10\ {}^0\mathrm{C}$ enz.

tool 5.5

a $\Delta T(n) = \Delta T(0) \cdot (\dfrac{1}{2})^n \rightarrow \Delta T(n) = 40 \cdot (\dfrac{1}{2})^n$

b $\Delta T(2) = 40 \cdot (\dfrac{1}{2})^2 \rightarrow \Delta T(2) = 40 \times (\dfrac{1}{4}) = 10\ {}^0C$

tool 5.6

c $\Delta T = 10 \rightarrow 10 = 40 \times (\dfrac{1}{2})^n \rightarrow \dfrac{10}{40} = (\dfrac{1}{2})^n$

$\rightarrow 0{,}25 = 0{,}5^n \rightarrow n = {}^{0,5}\log(0{,}25) = \dfrac{\log(0{,}25)}{\log(0{,}5)} = 2$

$\rightarrow t = 2 \times T_{\frac{1}{2}} = 20\,\mathrm{min}$

d

$$\Delta T(n) = \Delta T(0)\cdot(\frac{1}{2})^n$$

$$n = \frac{t}{T_{\frac{1}{2}}} \rightarrow n = \frac{14}{10} = 1{,}4 \rightarrow \Delta T(1{,}4) = 40\cdot(\frac{1}{2})^{1{,}4} = 15{,}2\ {}^0\text{C}$$

$$\text{afgerond}: \Delta T(1{,}4) = 15\ {}^0\text{C}$$

e

$$n = \frac{t}{T_{\frac{1}{2}}} = \frac{t}{600}$$

$$\Delta T(t) = 40\cdot(\frac{1}{2})^{\frac{t}{600}} = 40\cdot(2^{-1})^{\frac{t}{600}} = 40\cdot 2^{-\frac{t}{600}}$$

$$T(t) = T_{omgeving} + \Delta T = 20 + 40\cdot 2^{-\frac{t}{600}}$$

Opgave 5.7 **Ook bacteriën groeien exponentieel.**

a

$$n = \frac{t}{T_2} \rightarrow n = \frac{12\times 60\ \text{min}}{20\ \text{min}} = 36$$

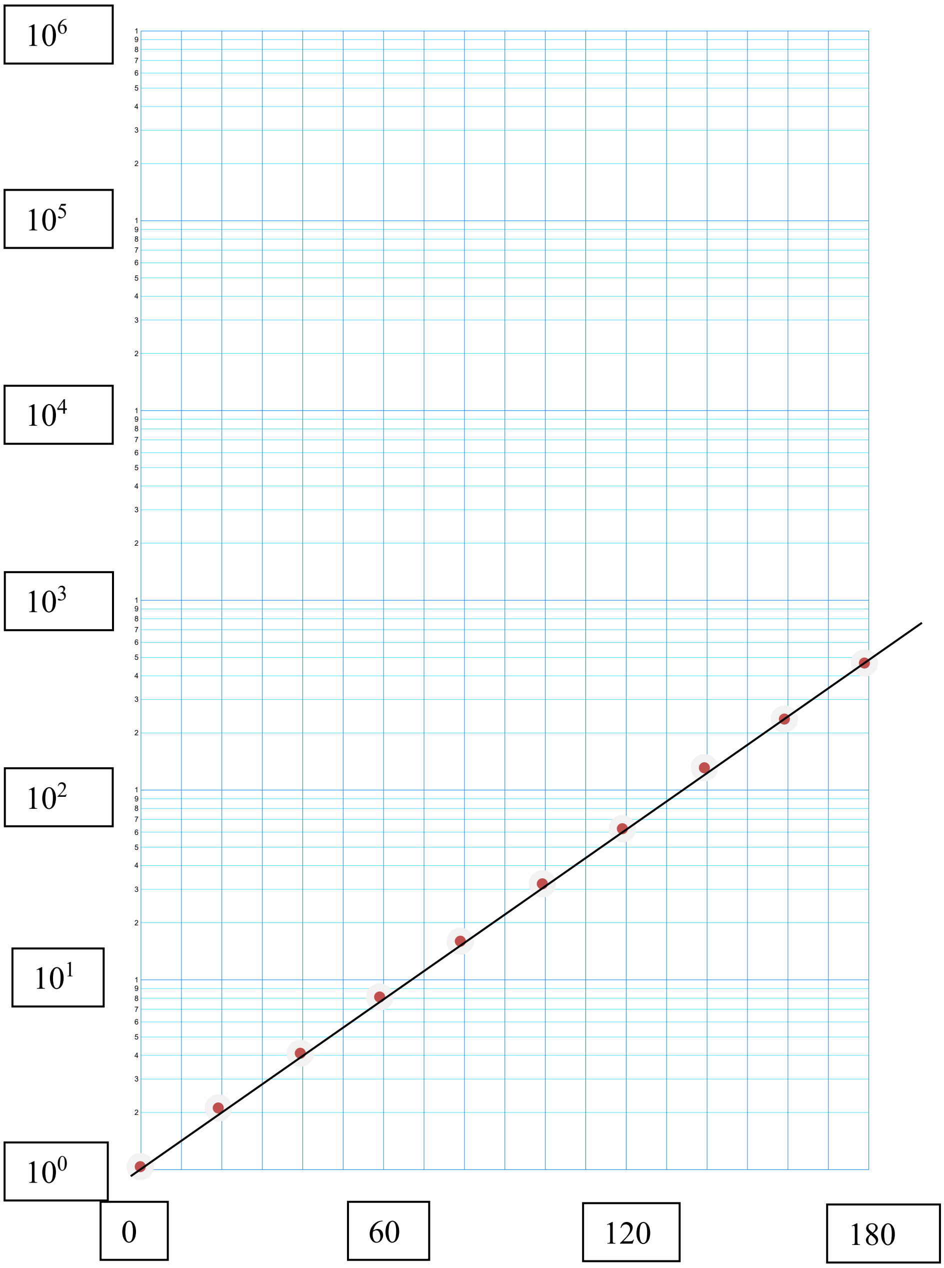
b

$$N(n) = N(0)\cdot 2^n \rightarrow N(36) = 1\times 2^{36} = 2^{36}$$

c Op de verticale as staat de exponent bij het grondtal 10.
Deze is toegenomen van 0 tot 6, dus het aantal N is toegenomen van 10^0 tot 10^6.

d

tool 5.8



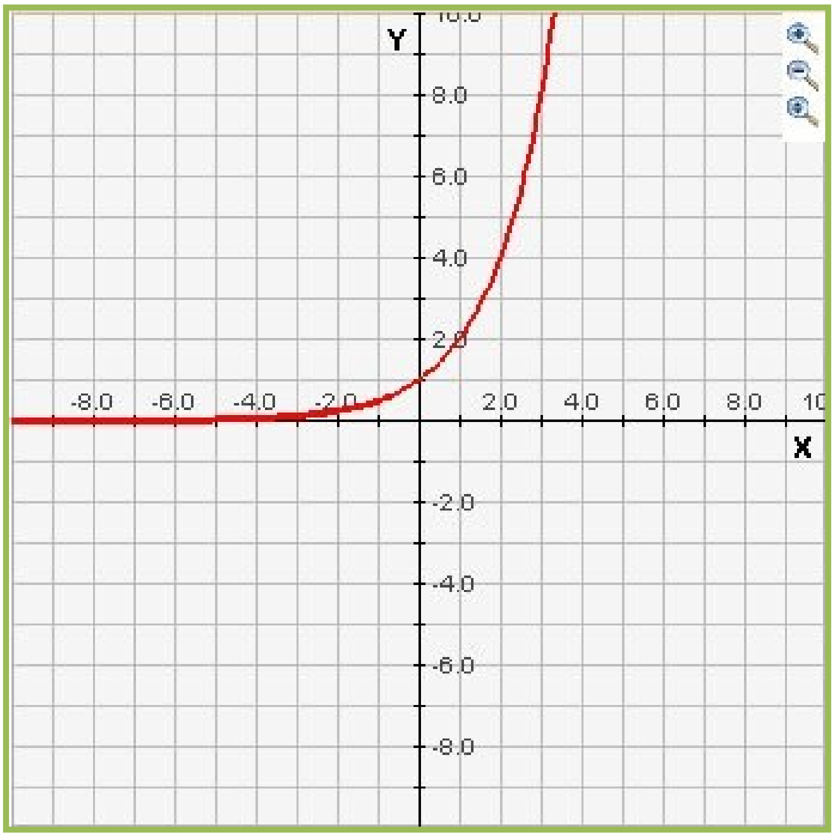
Oefenen 5.2

Meer oefening en/of uitleg nodig?

Site van Herman Hofstede

Opgave 5.9 **Kengetallen bij exponentiële functies**

Schets eerst de grafieken en controleer dan via de tool.



tool 5.9

a $g(x) = -2^x$

g(x) heeft de tegengestelde waarde van *f(x)*. Dus als *f(1)*= 2 dan *g(1)* = -2 De grafiek van *g(x)* is dus *f(x)* gespiegeld t.o.v de x-as.

b $h(x) = 2 \cdot 2^x$

h(x) heeft een waarde die 2x zo groot is dan *f(x)*. Dus als *f(1)*= 2 dan *h(1)* = 4 De grafiek van *h(x)* is dus de grafiek van *f(x)* maar dan een factor 2 'uitgerekt'.

c $k(x) = 2^{x-2} = 2^x \cdot 2^{-2} = 0,25 \cdot 2^x$

k(x) heeft een waarde die 0,25x zo groot is dan *f(x)*. Dus als *f(1)*= 2 dan *k(1)* = 0,5 De grafiek van *k(x)* is dus de grafiek van *f(x)* maar dan een factor 4 'ingedrukt'.

d $l(x) = 2^{x+1} = 2^x \cdot 2^1 = 2 \cdot 2^x$

l(x) is dus dezelfde als *h(x)*.

e $m(x) = 0,5 \cdot 2^x = 0,5 \cdot f(x)$

f $$n(x) = 2^x + 2 = f(x) + 2$$

De grafiek van *f(x)* wordt dus 2 naar boven opgeschoven

g $$p(x) = 2^{-1} \cdot 2^x = \frac{1}{2} \cdot f(x)$$ zelfde als *m(x)*

h $$q(x) = (2^x)^2 = (f(x))^2$$

Alle waardes van *f(x)* worden gekwadrateerd .

i $$r(x) = 4^x = (2^2)^x = (2^x)^2 = (f(x))^2$$ zelfde als *q(x)*

j $$s(x) = 2^{-x} = \frac{1}{2^x}$$ als *f(1)*=2 dan $$s(1) = \frac{1}{2}$$

Dus als *f(x)* klein is dan is *s(x)* groot en omgekeerd.

Opgave 5.11 **Exponentiële functie $c(H_3O^+) = 10^{-pH}$**

tool 5.11

a
$$c = 10^{-pH}$$
$$c > 1$$
$$10^{-pH} = 1 \rightarrow \log(10^{-pH}) = \log(1) \rightarrow -pH = 0 \rightarrow pH = 0$$
$$10^{-pH} > 1 \rightarrow \log(10^{-pH}) > \log(1) \rightarrow -pH > 0 \rightarrow pH < 0$$

b
$$c = 10^{-pH}$$
$$c = 0{,}25$$
$$10^{-pH} = 0{,}25 \rightarrow \log(10^{-pH}) = \log(0{,}25) \rightarrow pH = -\log(0{,}25) = 0{,}60$$

c
$$c = 10^{-pH}$$
$$c = 10^0 = 1 \text{ mol/L}$$

Opgave 5.13 **Inverse functies**

desmostool

Bepaal de inverse functie van :

a
$$y = 2x + 1 \rightarrow 2x = y - 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$$
$$\rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

Ander voorbeeld uit de praktijk van het lab:
Voor het verband tussen extinctie (E) en concentratie (c) geld:

$$E = 0{,}2c + 0{,}3$$

Je kunt ook c als functie van E geven

$$E = 0,2c + 0,3 \rightarrow 0,2c = E - 0,3 \rightarrow c = \frac{E}{0,2} - \frac{0,3}{0,2} \rightarrow c = 5E - 1,5$$

Als je E verticaal uitzet tegen c dan krijg je: $f(x) = 0,2x + 0,3$

Als je c verticaal uitzet tegen E dan krijg je: $f^{-1}(x) = 5x - 1,5$

f en f^{-1} zijn elkaars inverse functies.

b
$$y = 2^x \rightarrow x = {}^2\log(y) \rightarrow f^{-1}(x) = {}^2\log(x)$$
$$f(x) = 2^x \ en \ f^{-1}(x) = {}^2\log(x) \ zijn \ gespiegeld \ o.v.de \ lijn \ y = x$$

c
$$y = 2x^3 \rightarrow x^3 = \frac{y}{2} \rightarrow x = (\frac{y}{2})^{1/3} \rightarrow f^{-1}(x) = (\frac{x}{2})^{1/3} \ of \ f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{2}}$$

voor de functie $y' = \sqrt[3]{\frac{x}{2}}$ geldt dat $x \geq 0$

d
$$y = x\sqrt{x} \quad x \geq 0$$
$$y = x\sqrt{x} \rightarrow y = x^{3/2} \rightarrow x = y^{2/3} \rightarrow f^{-1}(x) = x^{2/3}$$

e $y = x^2 + 2$ geldt voor alle waarden van x of $-\infty < x < \infty$ of $x \in R$

$$y = x^2 + 2 \rightarrow x^2 = y - 2 \rightarrow x = \sqrt{(y-2)} \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{(x-2)} \quad met \ x \geq 2$$

Opgave 5.15 ***pH = -log[H₃O⁺]***

a
$$pH = -\log[H_3O^+]$$
$$pH = -\log(0,05) = -(- = 1,30) = 1,30$$

b
$$pH = -\log[H_3O^+]$$
$$pH = -\log(10^{-4}) = 4$$
$$pH = -\log(10^{-5}) = 5$$

De pH neem toe met 1 als de concentratie 10x zo klein wordt

c
$$pH = -\log[H_3O^+]$$
$$0,7 = -\log[H_3O^+] \rightarrow -0,7 = \log[H_3O^+] \rightarrow [H_3O^+] = 10^{-0,7} = 0,200 \text{ mol/L}$$

Opgave 5.17 **Afname van radio-activiteit is exponentieel.**

a

$$N(n) = 100 \cdot (\frac{1}{2})^n \rightarrow N(n) = 100 \cdot 2^{-n} \rightarrow N(t) = 100 \cdot 2^{-t/5700}$$

b -

c

$$N(t) = 100 \cdot 2^{-t/5700} \rightarrow$$
$$20 = 100 \cdot 2^{-t/5700} \rightarrow 0{,}2 = 2^{-t/5700} \rightarrow -t/5700 = {}^2\log(0{,}2) \rightarrow$$
$$-t/5700 = \frac{\log(0{,}2)}{\log(2)} \rightarrow -t/5700 = -2{,}32 \rightarrow t = 2{,}32 \times 5700 = 1{,}3 \cdot 10^4 \ \ jaar$$

Opgave 5.19 **Vergelijkingen met exponentiële functies.**

tool 5.13

a

$$3^{x-2} = \frac{1}{9} \rightarrow 3^{x-2} = 3^{-2}$$
$$\rightarrow x - 2 = -2 \rightarrow x = 0$$

b

$$(\frac{1}{4})^{x+4} = 4 \rightarrow (4^{-1})^{x+4} = 4^1 \rightarrow -1(x+4) = 1 \rightarrow -x - 4 = 1$$
$$\rightarrow x = -5$$

c

$$2^{x+2} = 4^x \rightarrow 2^{x+2} = 2^{2x} \rightarrow x + 2 = 2x$$
$$\rightarrow -x = -2 \rightarrow x = 2$$

d

$$2^{-x} = 2^{x^2-2} \rightarrow -x = x^2 - 2 \rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$
$$\rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 8}}{2}$$
$$\rightarrow x_1 = \frac{-1+3}{2} = 1 \ en \ x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2$$

e

$$(\frac{1}{4})^{3x-1} = 32\sqrt{8} \rightarrow (2^{-2})^{3x-1} = 2^5 \cdot 2^{3/2} \rightarrow 2^{-6x+2} = 2^{6,5}$$
$$-6x + 2 = 6{,}5 \rightarrow x = \frac{4{,}5}{-6} = -0{,}75$$

f

$$2^x = 13 \rightarrow x = {}^2\log(13)$$
$$afgerond: x = \frac{\log(13)}{\log(2)} = 3{,}70$$

g

$$5^{2x} = 3^{-x+4}$$
$$5 = 3^{{}^3\log(5)} = 3^{1,465}$$
$$\rightarrow (3^{1,465})^{2x} = 3^{-x+4} \rightarrow 1{,}465 \times 2x = -x + 4$$
$$\rightarrow 2{,}93x = -x + 4 \rightarrow 3{,}93x = 4 \rightarrow x = \frac{4}{3{,}93} = 1{,}02$$

h

$$3^{x+1}=4^{x^2+2x}$$
$$3=4^{{}^{4}\log(3)}=4^{0,792}$$
$$\rightarrow (4^{0,792})^{x+1}=4^{x^2+2x}$$
$$\rightarrow 0,792(x+1)=x^2+2x \rightarrow x^2+1,208x-0,792=0$$
$$\textit{vierkantsvergelijking met 2 oplossingen}$$

Opgave 5.21 **Vergelijkingen en ongelijkheden met logaritmische functies.**

tool 5.13

a

$$\log(x)>3\cdot\log(3)$$
$$\log(x)=\log(3^3)\rightarrow x=3^3$$
$$\rightarrow x>3^3$$

b

$$^{2}\log(4^x-2)=x \quad 4^x>2\rightarrow 2^{2x}>2^1\rightarrow 2x>1\rightarrow x>0,5$$
$$\rightarrow 2^x=4^x-2 \quad \textit{stel } 2^x=p$$
$$\rightarrow p=p^2-2\rightarrow p^2-p-2=0$$
$$\rightarrow p_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}\rightarrow p_1=2 \textit{ en } p_2=-1$$
$$\rightarrow 2^x=2\rightarrow x=1$$
$$2^x=-1 \textit{ kan niet}$$

c

$$^{2}\log(2x+1)<{}^{2}\log(x-2) \quad x>-0,5 \textit{ en } x>2 \textit{ dus } x>2$$
$$^{2}\log(2x+1)<{}^{2}\log(x-2)$$
$$\rightarrow 2x+1<x-2\rightarrow x<-3 \quad \textit{geen oplossing}$$

d

$$^{3}\log(x^2+x-2)\geq 2$$
$$(x^2+x-2)>0$$
$$x^2+x-2=0\rightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}$$
$$x_{1,2}=\frac{-1\pm 3}{2}\rightarrow x_1=-2\vee x_2=1 \quad \textit{dus } x<-2\vee x>1$$
$$x^2+x-2=3^2$$
$$\rightarrow x^2+x-11=0\rightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+44}}{2}$$
$$x_1=\frac{-1+\sqrt{45}}{2}=2,85 \quad x_2=\frac{-1-\sqrt{45}}{2}=-3,85$$
$$\textit{beide oplossingen voldoen}$$
$$x\leq -3,85\vee x\geq 2,85$$

e $\ln(x) > 1 \quad x > 0$

$x > e^1 \rightarrow x > e$

f ${}^4\log(x) > {}^2\log(2x) \quad x > 0$

${}^4\log(x) > {}^4\log(2x)^2 \rightarrow x > 4x^2 \rightarrow 1 > 4x \rightarrow x < 0,25$

$0 < x < 0,25$