Uitwerkingen hoofdstuk 7

7. Differentiëren.

Opgave 7.1 **Van <u>gemiddelde snelheid naar snelheid</u> op een bepaald tijdstip**

tool 7.1

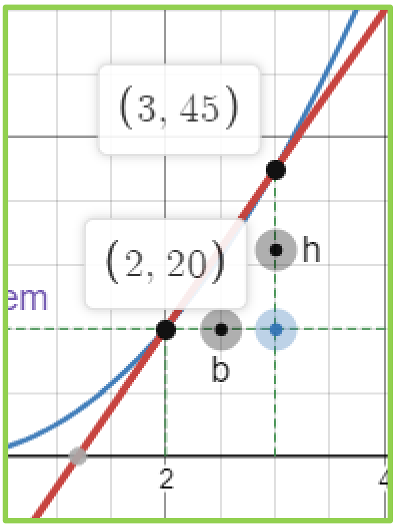
Onderzoek met tool 7.1

Voor een optrekkende auto geldt de <u>plaatsfunctie</u> $s(t) = 5t^2$

s is de afstand in meter(m) en t is de tijd in seconde(s).

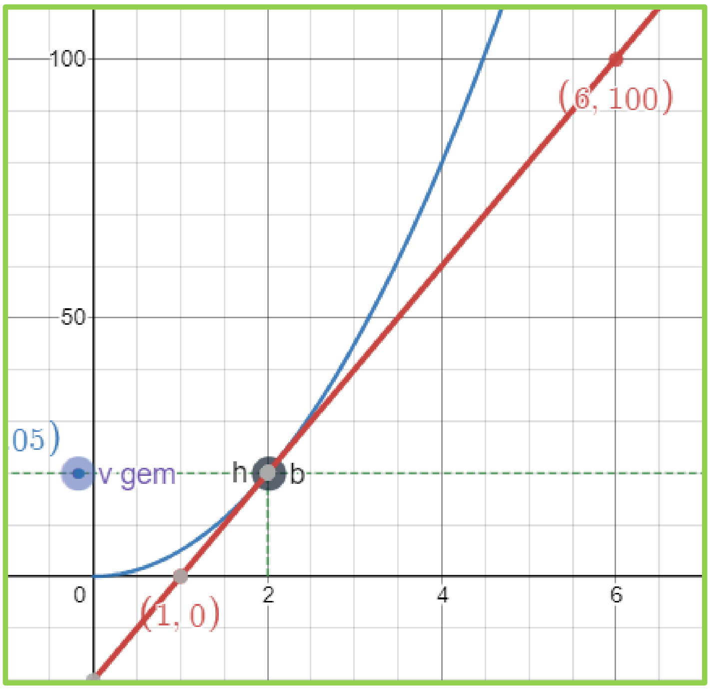
Waardes kunnen afgelezen worden door op de grafiek te klikken.

a



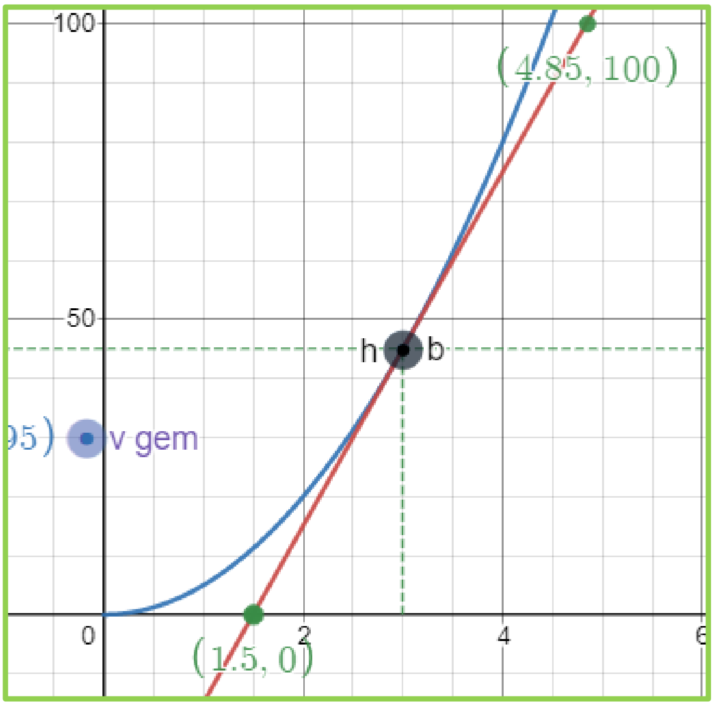
$$v_{gem}[2;3] = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{h}{b} = \frac{45-20}{3-2} = 25\ {}^{\mathrm{m}}\!/_{\mathrm{s}}$$

b



$$v(2) = \frac{100-0}{6-1} = 20\ {}^{\mathrm{m}}\!/_{\mathrm{s}} \quad \textit{helling raaklijn in } t = 2\ \mathrm{s}$$

c



$$v(3)=\frac{100-0}{4,85-1,50}=29,9\ {}^{\text{m}}\!/_{\text{s}}\qquad \textit{helling raaklijn in } t=3\text{ s}$$

Hier is gekozen voor de punten (1,5 ;0) en (4,85 ; 100).
Je kunt ook 2 andere punten kiezen op de raaklijn. Hoe groter het verschil op de horizontale as hoe nauwkeuriger de berekening

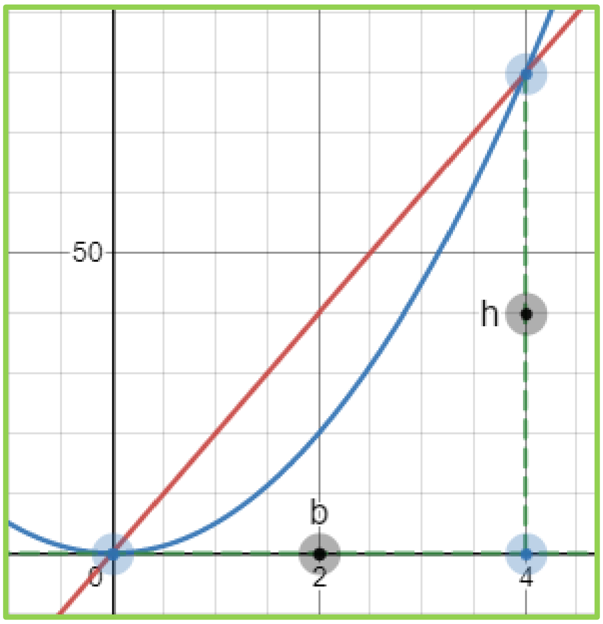
Opgave 7.2 **Van snijlijn naar raaklijn in de grafiek van *f(x)***

Onderzoek met tool 7.2

tool 7.2

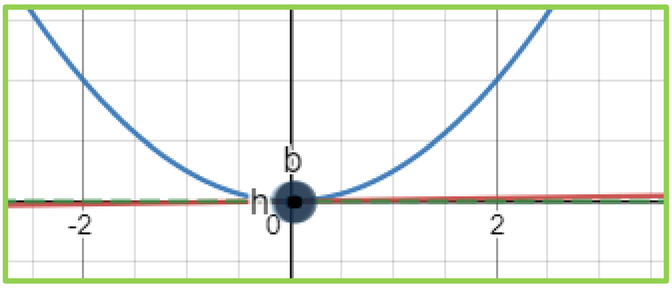
In deze tool wordt de functie $f(x) = 5x^2$ onderzocht.

a Bepaal de helling van de snijlijn door (0,0) en (4,80).



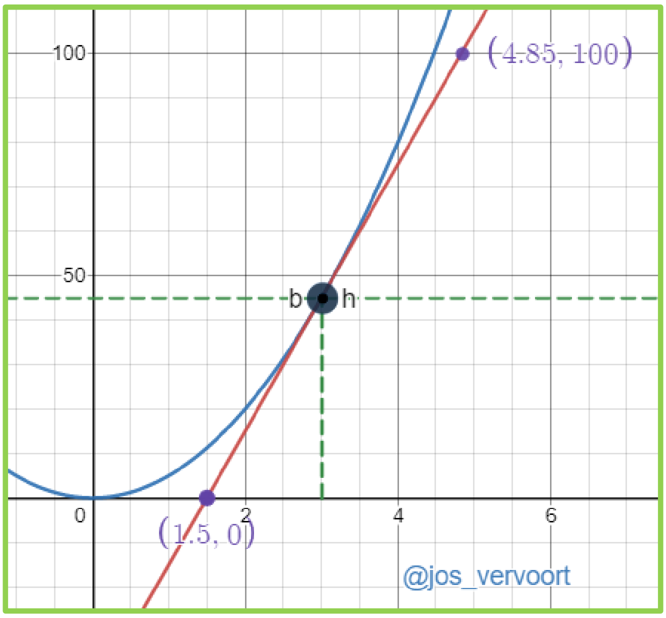
$$helling = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{80-0}{4-0} = 20$$

b Bepaal de helling van de raaklijn in (0,0)



Helling raaklijn in 0,0 = 0

c Bepaal de vergelijking van de raaklijn voor x = 3

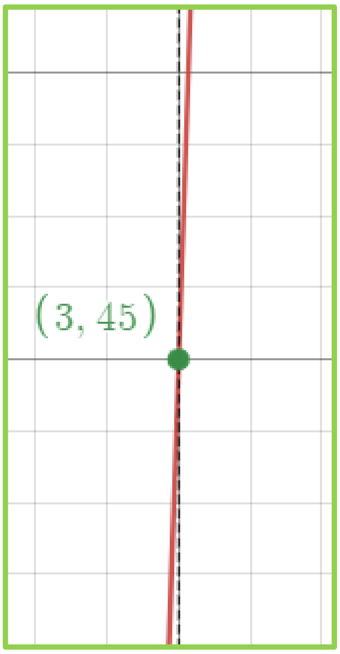


$$y = ax + b$$
$$a = \frac{100-0}{4,85-1,5} = 29,9$$
$$lijn\ gaat\ door\ (1,5;0)$$
$$0 = 29,9 \times 1,5 + b \rightarrow b = 44,9$$
$$y = 29,9x + 44,9$$
$$als\ x_2 - x_1 \rightarrow 0 \quad dan\ a = 30\ en\ b = 45$$
$$en\ y = 30x + 45$$

d Bereken de hellingshoek voor x = 3

$$r.c = 30 \rightarrow \tan(\alpha) = 30$$
$$\rightarrow \alpha = \arctan(30) = 88,1^\circ$$

In de grafiek bij opgave c) lijkt de hoek veel kleiner. Dit komt omdat 1 schaaldeel van de x-as de waarde 0,5 heeft en een schaaldeel op de y-as de waarde 10 heeft.



x-as *en* *y*-as hebben hier dezelfde schaalverdeling

1 schaaldeel = 0,05

Opgave 7.3

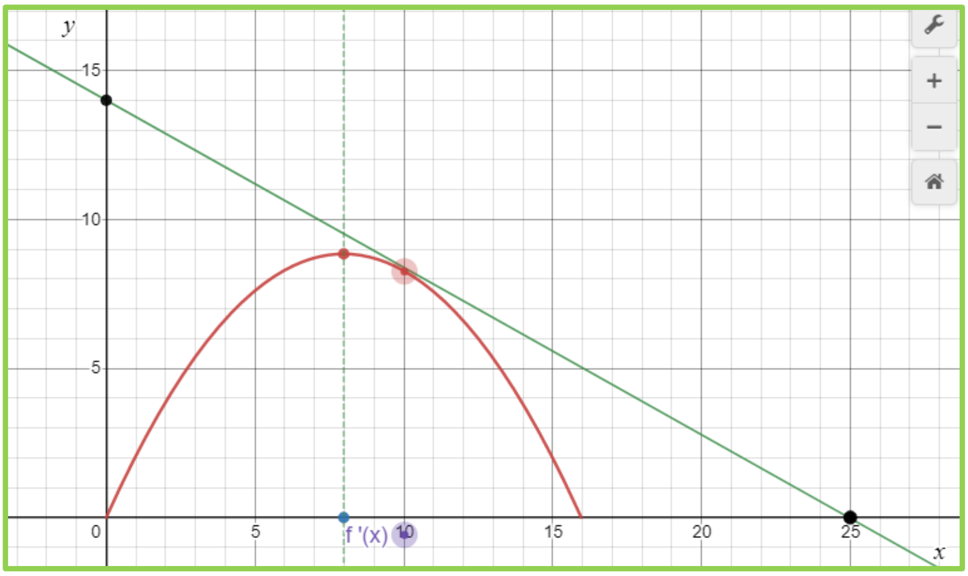
Kogelbaan

In tool 7.3 kun je het verband onderzoeken tussen *f(x)* en *f ‘(x)*.

In de afbeelding is de grafiek van *f(x)* en *f ‘(x)* te zien.

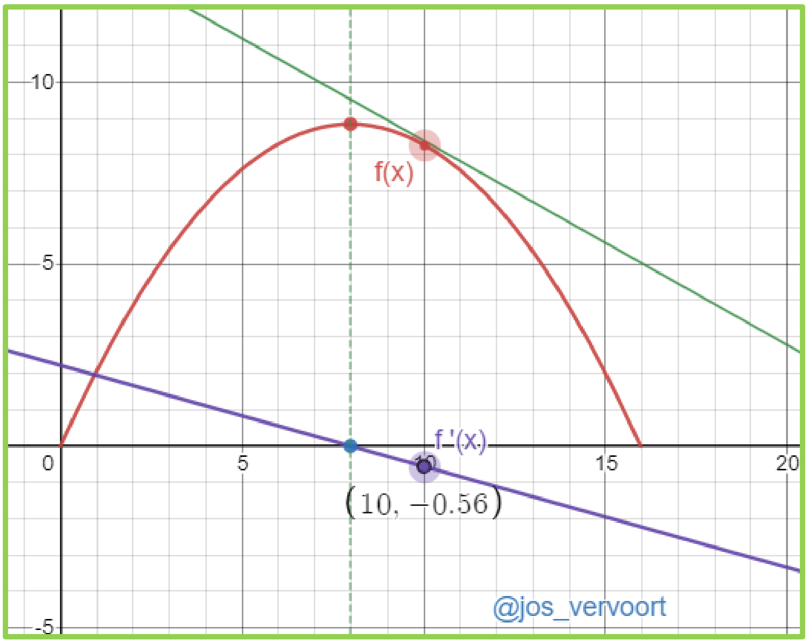
tool 7.3

a Bepaal de helling van de raaklijn voor $x = 10$ via meting.



$$f'(10) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-14}{25-0} = -\frac{14}{25} = -0,56$$

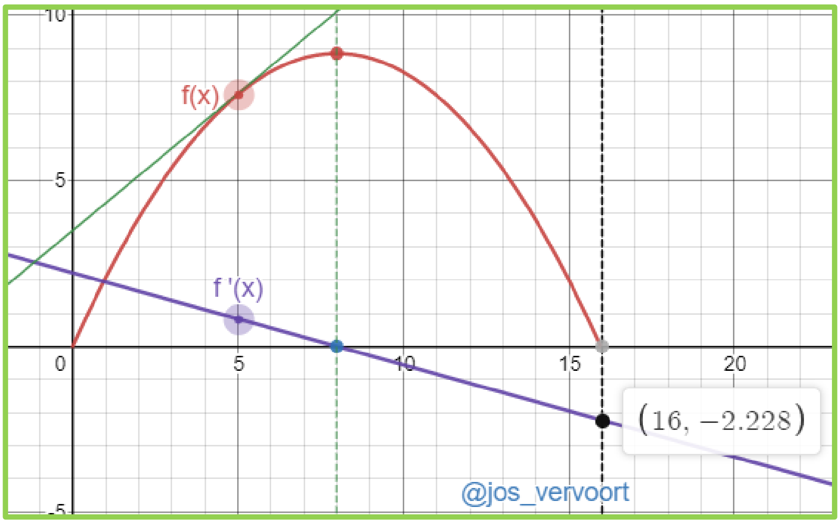
b Controleer deze waarde door *f '(10)* af te lezen.



$f'(x) = -0,56$

afgelezen op grafiek van $f'(x)$

c Bereken de hoek waaronder de kogel neer komt door de afgeleide te bepalen voor dit punt.



De kogel komt neer bij x = 16 m.

$f'(x) = -2,2$

$\tan(\alpha) = -2,2 \rightarrow \alpha = \arctan(-2,2)$

$\rightarrow \alpha = -65^{\circ}$

d In het hoogste punt van de kogelbaan is de r.c. van de raaklijn 0.
f '(x) =0 Dat is dus bij het snijpunt van *f '(x)* met de *x*-as.

Opgave 7.4 **Bestudering van bewegingen**

Voor de beweging van een massa P geldt dat de afstand tot een referentiepunt O (boom) verandert volgens het functievoorschrift:

tool 7.4

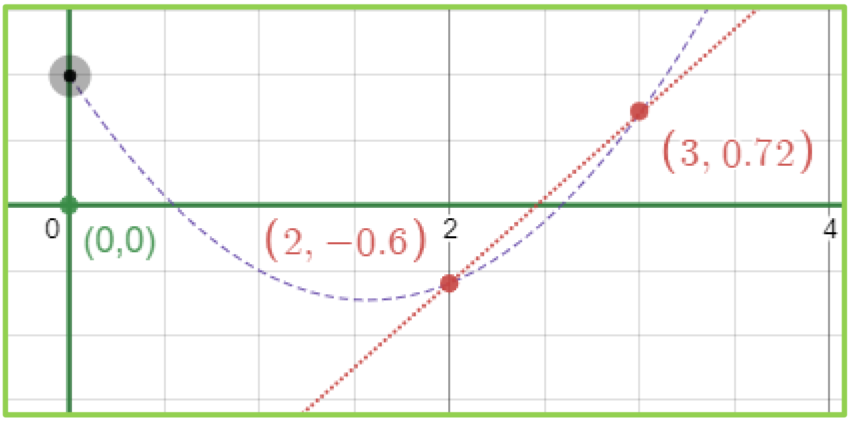
$x(t) = 0,7t^2 - 2,2t + 1$

Gebruik **tool 7.4**

a Op welke afstand van O begint de beweging?

$x(0) = -1$

b Bereken de gemiddelde snelheid tussen t = 2 en t =3



tussen t = 2 en t = 3 s: $v_{gem} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{0,72-(-0.6)}{3-2} = 1,32\ ^{m}\!/_{s}$

c Op het moment dat v = 0 m/s is de richting van de raaklijn horizontaal ofwel r.c. =0

d Welke waardes hebben a, b en c zo dat de massa begint op 3m rechts van O en omkeert in het referentiepunt

$x(0) = 3\ m$

$x(3) = 0\ m\ en\ v(3) = 0\ ^{m}\!/_{s}$

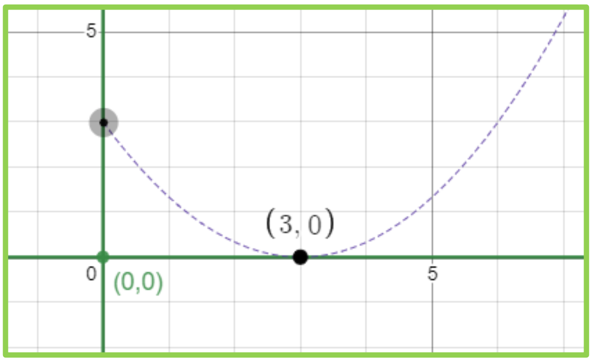
$x = at^2 + bt + 3 \rightarrow 9a + 3b = -3$

$v = 2at + b = 0 \rightarrow 6a + b = 0 \rightarrow b = -6a$

$9a - 18a = -3 \rightarrow 9a = 3 \rightarrow a = \dfrac{1}{3}$

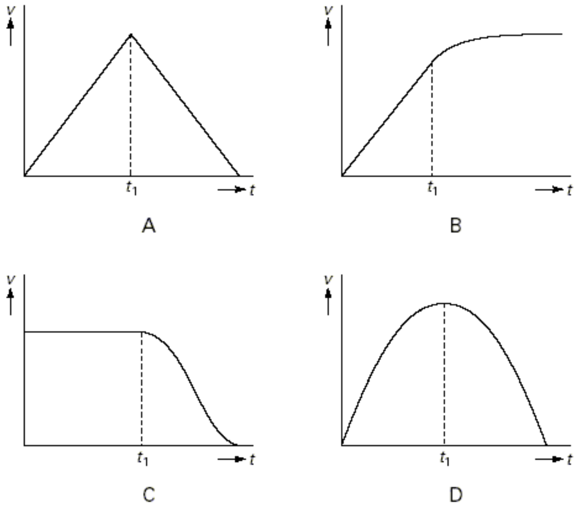
$b = -6a = -2$

$x(t) = \dfrac{1}{3}t^2 - 2t + 3$



Opgave 7.5 **Beschrijven van processen aan de hand van een grafiek.**

In onderstaande grafieken is de snelheid uitgezet tegen de tijd.



a

A: De snelheid neemt vanuit stilstand constant toe naar rechts tot het tijdstip t_1 en daarna constant af naar rechts tot stilstand.

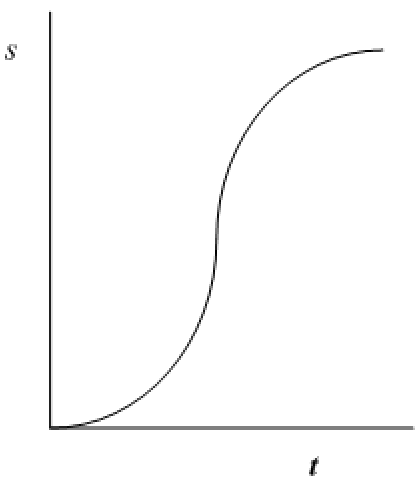
B: De snelheid neemt vanuit stilstand constant toe naar rechts tot het tijdstip t_1 en daarna neemt daarna langzaam toe tot een constante eindwaarde.

C: De snelheid is constant tot het tijdstip t_1 en neemt daarna steeds sneller af en daarna steeds minder snel af tot stilstand.

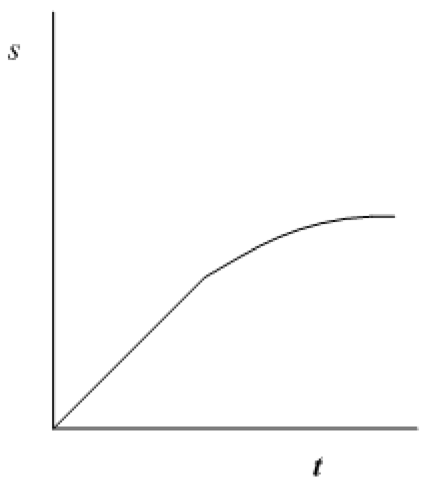
D: De snelheid neemt steeds minder toe tot een maximale waarde op tijdstip t_1 en daarna steeds sterker af tot stilstand.

b

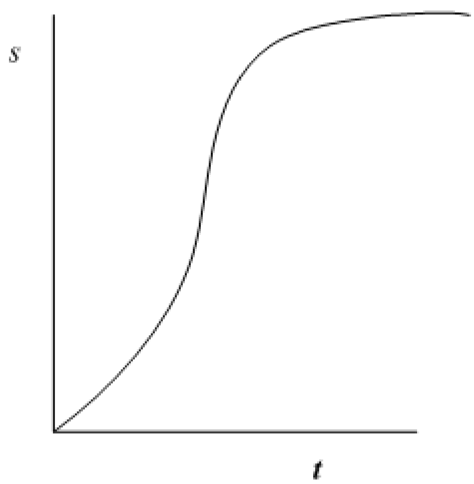
A:



C:



D:



In alle gevallen is de snelheid naar rechts gericht en neemt de afstand toe. Als de afstand niet meer verandert is de snelheid 0 .

tool opgave 7.5

Met deze animatie kun je het verband tussen afstand en snelheid bestuderen

Opgave 7.6

Afgeleide bepalen

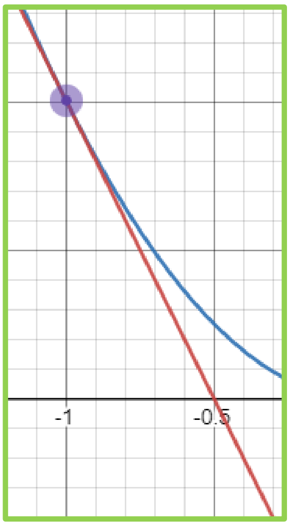
tool 7.5

Met behulp van tool 7.5 kun je in ieder punt de afgeleide bepalen.

Voor bepaling van de helling m in x = -1 kies je : a = -1 en h = 0.001

a Vul de volgende tabel in:

voorbeeld voor x = -1

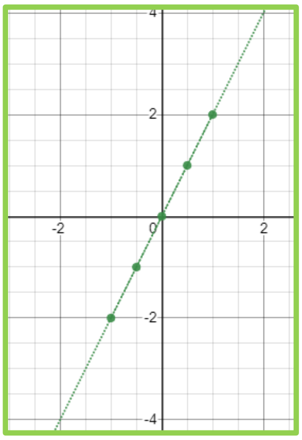


$$f'(-1) = \frac{-1}{0,5} = -2$$

x	-1	-0,5	0	0,5	1
f '(x) = m	$f'(x) = \frac{-1}{0,5} = -2$	-1	0	1	2

b Teken de grafiek van f '(x) en bepaal hiermee het functievoorschrift f '(x).

tool opgave 7.6



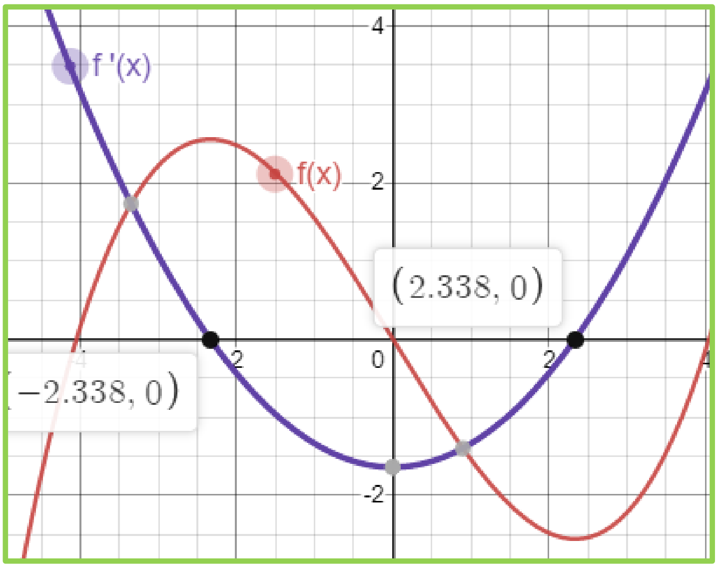
$$f'(x) = 2x$$

Opgave 7.7 **Afgeleide bepalen**

In tool 7.6 wordt is zowel *f(x)* als *f ‘(x)* te zien.

tool 7.6

a Voor welke waarde van *x* heeft *f(x)* een extreme waarde?



f(x) heeft een extreme waarde als *f ’(x)* = 0.

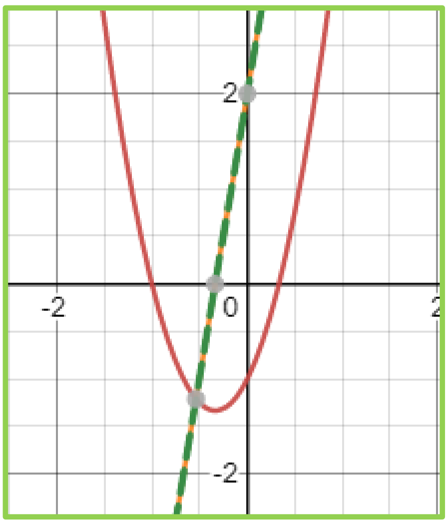
b Voor welke waarde van *x* is *f’(x)* = 0?
Als *x* = -2,3 of als *x* = 2,3

c Wat kun je van f(x) zeggen als *f ‘(x)* < 0
Als *f ‘(x)* < 0 dan is de helling van de raaklijn aan de grafiek negatief, de grafiek is dan dalend.

Opgave 7.8 **Afgeleide bepalen**

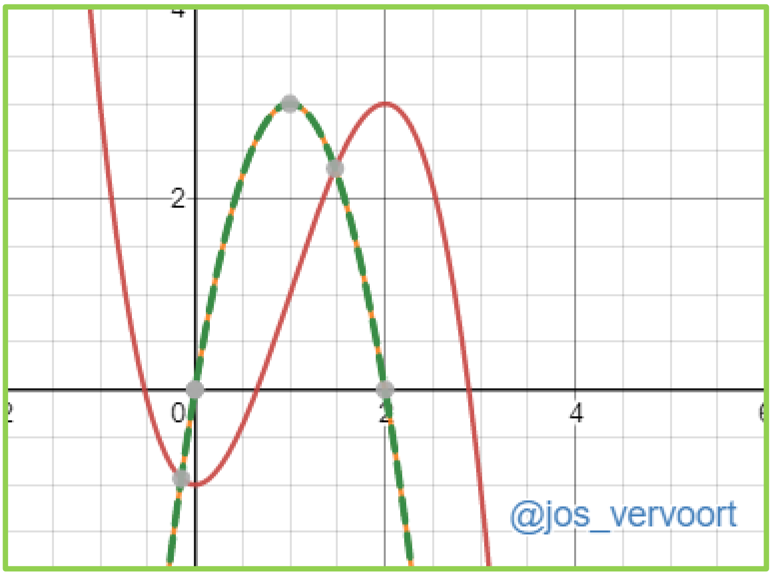
tool 7.7

a $f(x) = 3x^2 + 2x - 1 \quad f'(x) = 6x + 2$



h(x) en g(x) overlappen elkaar

b $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 1 \quad f'(x) = -3x^2 + 6x$



h(x) en g(x) overlappen elkaar

Opgave 7.9 **Differentiëren van standaardfuncties**

Bepaal de afgeleide van de functies en controleer met tool 7.8 en 7.9

tool 7.8

tool 7.9

a $f(x) = x^4 \quad f'(x) = 4x^3$

b $g(x) = {}^2\log(x) \quad g'(x) = \dfrac{1}{x\ln(2)}$

c $h(x) = \sin(x) \quad h'(x) = \cos(x)$

d $k(x) = 2^x \quad k'(x) = 2^x \cdot \ln(2)$

e $f'(1) = 4 \cdot (1)^3 = 4$

f
$y = ax + b$
$a = 4$
$f(1) = 1^4 = 1 \quad \textit{punt } (1,1) \textit{ ligt op raaklijn}$
$1 = 4 \times 1 + b \rightarrow b = -3$
$y = 4x - 3$

Opgave 7.10 **Differentiëren van samengestelde functies.**

Bepaal de afgeleide van de een aantal samengestelde functies en controleer de juistheid met behulp van tool 7.8.

tool 7.8

	$f(x)$	$f'(x)$
a	$x^2 \times 2x$	
b	$\sin(x) \times x^2$	
c	$x^2 + 2x$	
d	$\sin(x) + x^2$	
e	$\dfrac{\sin(x)}{2x}$	

a $f(x) = x^2 \times 2x \quad f'(x) = 2x \cdot 2x + x^2 \cdot 2 = 6x^2$

b $f(x) = \sin(x) \times x^2 \quad f'(x) = \cos(x) \cdot x^2 + \sin(x) \cdot 2x$

c $f(x) = x^2 + 2x \quad f'(x) = 2x + 2$

d $f(x) = \sin(x) + x^2 \quad f'(x) = \cos(x) + 2x$

e $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{2x} \quad f'(x) = \dfrac{\cos(x) \cdot 2x - \sin(x) \cdot 2}{4x^2} = \dfrac{x\cos(x) - \sin(x)}{2x^2}$

Opgave 7.11 **Differentiëren van samengestelde functies.**

Bepaal de afgeleide van de volgende samengestelde functies en controleer de juistheid met tool 7.8 of tool 7.9

tool 7.8

tool 7.9

	$f(x)$	$f'(x)$
a	$(2x+3)^4$	
b	$\sin(x+2)^2$	
c	$(\sin(x+2))^2$	
d	$\dfrac{(x^2+1)}{(x-2)}$	
e	$x^4 \cdot \sin x$	
f	Bedenk er zoveel als je nodig hebt om zonder fouten te differentiëren	Controleer met applet.

a $f(x) = (2x+3)^4 \quad f'(x) = 4(2x+3)^3 \cdot 2 = 8(2x+3)^3$

b $f(x) = \sin(x+2)^2 \quad f'(x) = \cos(x+2)^2 \cdot 2(x+2)$

$\rightarrow f'(x) = 2(x+2)\cos(x+2)^2$

c $f(x) = (\sin(x+2))^2 \quad f'(x) = 2\sin(x+2) \cdot \cos(x+2)$

d

$$f(x)=\frac{(x^2+1)}{(x-2)} \quad f'(x)=\frac{2x\cdot(x-2)-1\cdot(x^2+1)}{(x-2)^2}$$
$$\to f'(x)=\frac{2x\cdot(x-2)-1\cdot(x^2+1)}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x-1}{(x-2)^2}$$

e

$$f(x)=x^4\cdot\sin(x) \quad f'(x)=4x^3\cdot\sin(x)+x^4\cdot\cos(x)$$

Opgave 7.12 **Differentiëren van samengestelde functies.**

tool 7.8

controleer met tool 7.8 . of tool 7.9 .

Teken vervolgens $f(x)$ en $f'(x)$ met tool 7.8 om te onderzoeken of de afgeleide 0 is bij een extreme waarde.

a $f(x)=3\sin(x^2) \quad f'(x)=3\cos(x^2)\cdot 2x=6x\cos(x^2)$

b $f(x)=(\sin(x))^2 \quad f'(x)=2\sin(x)\cos(x)$

c $f(x)=x^2\cdot e^x \quad f'(x)=2x\cdot e^x+x^2\cdot e^x=(x^2+2x)\cdot e^x$

d

$$f(x)=\frac{100\cdot x}{x+0,5}$$
$$f'(x)=\frac{100\cdot(x+0,5)-100x\cdot 1}{(x+0.5)^2}=\frac{50}{(x+0,5)^2}$$

oefenen 7.1

Extra oefeningen met de kettingregel kun je vinden op de site van Herman Hofstede .

Opgave 7.13 **Differentiëren van samengestelde functies.**

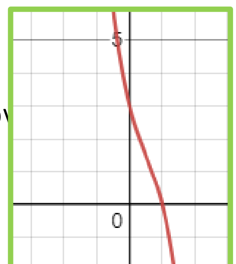
tool 7.8

Bepaal de waarde(s) van x waarvoor f een lokaal maximum en/of minimum heeft.
Probeer zelf de afgeleide te bepalen en gebruik tool 7.8 ter controle.
Soms kun je met tool 7.11 een betere grafiek tekenen.

tool 7.11

a

$$f(x)=5x^2+10x+6$$
$$f'(x)=10x+10$$
$$f'(x)=0\to x=-1$$



b $f(x) = -2x^3 + 3x^2 - 4x + 3$

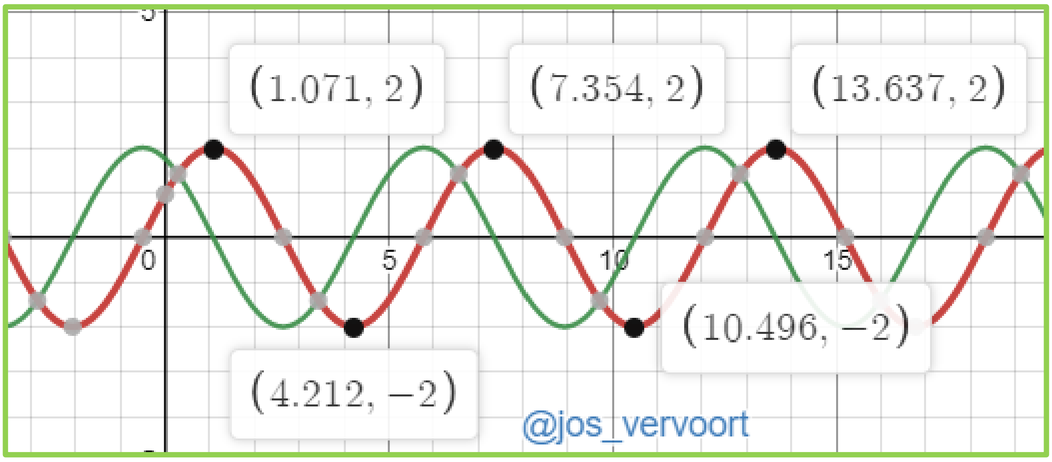
$f'(x) = -6x^2 + 6x - 4$

$D = 36 - 4 \times -6 \times -4 = -60$

geen extreme waardes

c $f(x) = 2\sin(x + 0.5)$

$f'(x) = 2\cos(x + 0.5)$



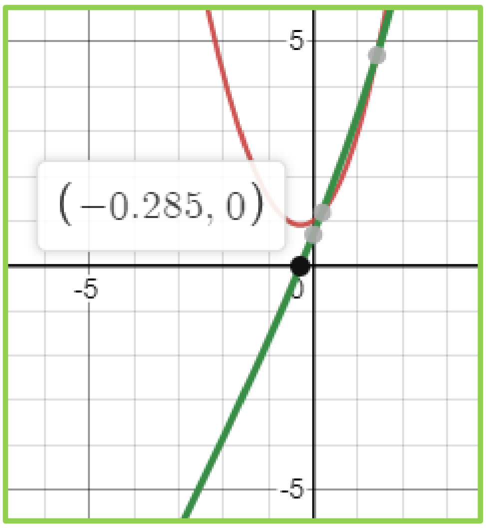
d $f(x) = \dfrac{2}{x} + x^2$

$f'(x) = \dfrac{-2}{x^2} + 2x$

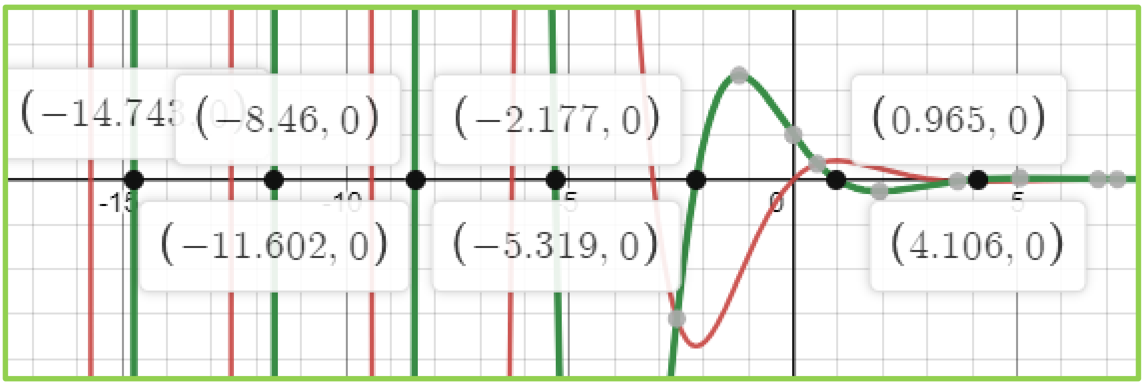
$\dfrac{-2}{x^2} + 2x = 0 \rightarrow 2 = 2x^3 \rightarrow x^3 = 1 \rightarrow x = 1$

e $f(x) = 2^x + x^2$

$f'(x) = 2^x \cdot \ln 2 + 2x$

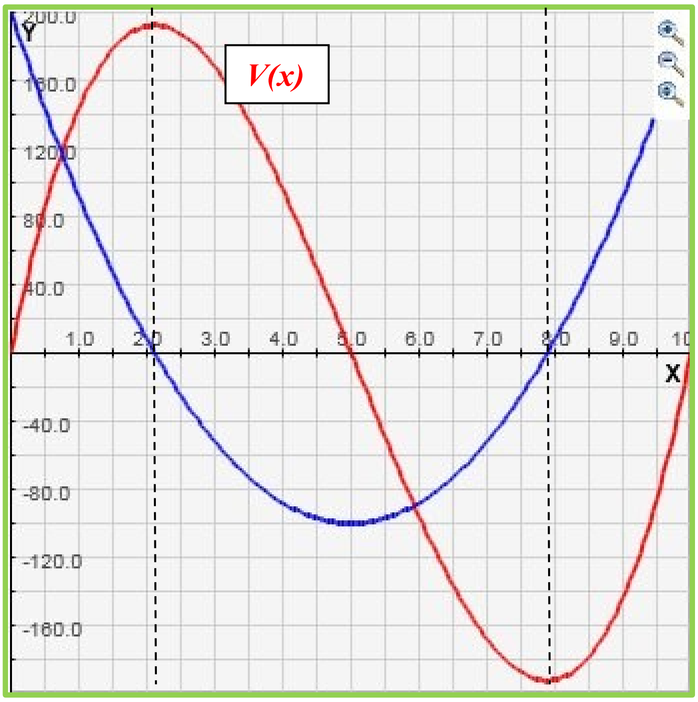


f $f(x) = (0.5)^x \cdot \sin(x)$ voor domein -2 < x < 8



Opgave 7.14 **Wanneer is volume maximaal?**

$$V = A \cdot h \rightarrow V(x) = (20-2x)\cdot(10-2x)\cdot x = (200-40x-20x+4x^2)\cdot x = 4x^3-60x^2+200x$$
$$V'(x) = 12x^2-120x+200$$
$$12x^2-120x+200=0 \rightarrow 6x^2-60x+100=0 \rightarrow x_{1,2} = \frac{60\pm\sqrt{3600-2400}}{12}$$
$$x_1 = \frac{60\pm\sqrt{1200}}{12} = \frac{60\pm 20\sqrt{3}}{12} = 5\pm\frac{5}{3}\sqrt{3} = 5\pm 2{,}89 \rightarrow x_1 = 7{,}89 \quad en\ x_2 = 2{,}11$$
$$V(2{,}11) = 192$$
$$V(7{,}89) = -192 \quad N.V.T$$



Opgave 7.15 **De wet van Snellius wiskundig bewijzen door optimalisering.**

$$AB = AP + PB$$
$$AP = \sqrt{h_1^{\,2} + x^2}$$
$$PB = \sqrt{h_2^{\,2} + (d-x)^2}$$
$$t = \frac{\sqrt{h_1^{\,2} + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{h_2^{\,2} + (d-x)^2}}{v_2} \rightarrow t = \frac{x}{v_1 \cdot \sin(\theta_1)} + \frac{d-x}{v_2 \cdot \sin(\theta_2)}$$
$$t'(x) = \frac{v_1 \cdot \sin(\theta_1)}{v_1^{\,2} \cdot \sin^2(\theta_1)} - \frac{v_2 \cdot \sin(\theta_2)}{v_2^{\,2} \cdot \sin^2(\theta_2)} = \frac{1}{v_1 \cdot \sin(\theta_1)} - \frac{1}{v_2 \cdot \sin(\theta_2)} \quad \textit{extreme waarde als } t'(x) = 0$$
$$\frac{1}{v_1 \cdot \sin(\theta_1)} - \frac{1}{v_2 \cdot \sin(\theta_2)} = 0 \rightarrow \frac{1}{v_1 \cdot \sin(\theta_1)} = \frac{1}{v_2 \cdot \sin(\theta_2)} \rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{\sin(\theta_1)}{\sin(\theta_2)} = n_{1,2}$$

Opgave 7.16 **Wanneer komt massa het verst?**

$$x(\alpha) = \frac{v^2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)}{9{,}81} = \frac{0{,}5v^2 \cdot \sin(2\alpha)}{9{,}81}$$
$$x'(\alpha) = \frac{0{,}5v^2}{9{,}81} \times 2 \times \cos(2\alpha) = \frac{v^2 \cdot \cos(2\alpha)}{9{,}81}$$
$$\frac{v^2 \cdot \cos(2\alpha)}{9{,}81} = 0 \rightarrow 2\alpha = \pi/2 \rightarrow \alpha = \pi/4 \; rad \quad of \quad \alpha = 45^o$$

Opgave 7.17 **Bepaal eerste en tweede afgeleide.**

tool 7.8

a
$$f(x) = 2x^3 - 2$$
$$f'(x) = 6x^2$$
$$f''"(x) = 12x$$

b
$$f(x) = x^4 + 3x^3 - 4x + 3$$
$$f'(x) = 4x^3 + 9x^2 - 4$$
$$f''(x) = 12x^2 + 18x$$

c
$$f(x) = 2\sin(x)$$
$$f'(x) = 2\cos(x)$$
$$f''"(x) = -2\sin(x)$$

d
$$f(x) = \frac{2}{x^3}$$
$$f'(x) = \frac{-6}{x^4}$$

e
$$f(x) = e^x$$
$$f'(x) = e^x$$
$$f''"(x) = e^x$$