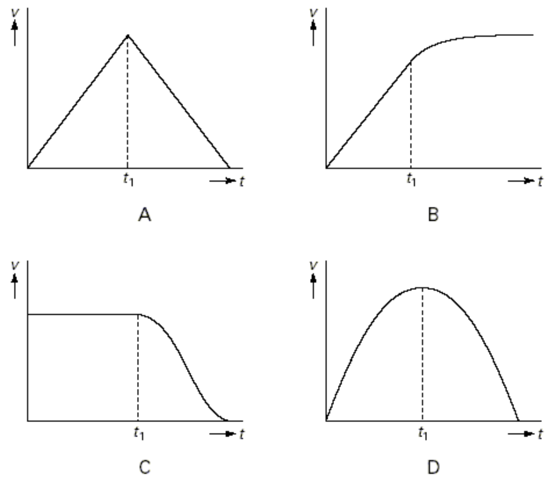
**Uitwerkingen hoofdstuk 7**

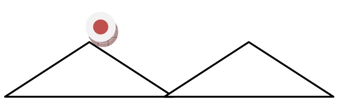
# 7. Differentiëren.

**Opgave 7.1** **Beschrijven van processen aan de hand van een grafiek.**

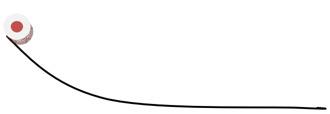
In onderstaande grafieken is de snelheid uitgezet tegen de tijd.



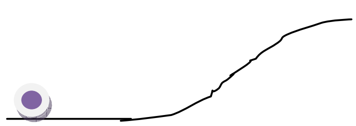

**a en b**



**A:** De snelheid neemt vanuit stilstand constant toe naar rechts tot het tijdstip $t_1$ en daarna constant af naar rechts tot stilstand.
*Je kunt hierbij denken aan een cilinder die onder invloed van de zwaartekracht van een helling afrolt en vervolgens tegen een even steile helling tot stilstand komt.*



**B:** De snelheid neemt vanuit stilstand constant toe naar rechts tot het tijdstip $t_1$ en daarna neemt daarna langzaam toe tot een consatnte eindwaarde.
*Je kunt hierbij denken aan een cilinder die onder invloed van de zwaartekracht van een helling afrolt en vervolgens op een helling komt die steeds vlakker wordt en overgaat in horizontaal vlak.*



**C:** De snelheid neemt is constant tot het tijdstip $t_1$ en neemt daarna steeds meer toe en vervolgens steeds meer af tot stilstand.
*Je kunt hierbij denken aan een cilinder die een constante snelheid heeft en na $t_1$ tegen een helling tot stilstand komt. De helling is in het eerste stuk steeds steiler en op het laatste stuk steeds vlakker.*

**D:** De snelheid neemt steeds minder toe tot een maximale waarde op tijdstip $t_1$ en daarna steeds sterker af tot stilstand.
*Je kunt hierbij denken aan een cilinder die van helling met afnemende helling rolt en vervolgens tegen een helling met toenemende helling rolt en tot stilstand komt.*

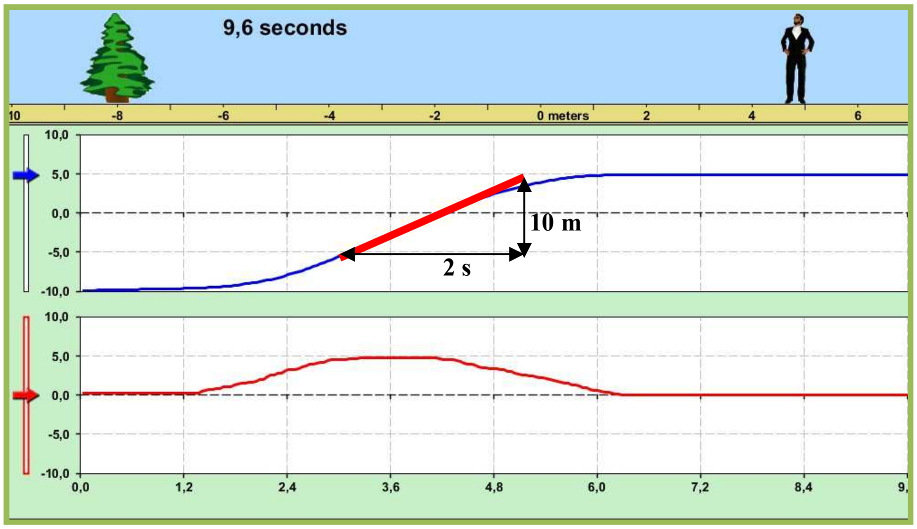
**Opgave 7.2** **Benoemen van veranderingen.**

**a** Bij 4,8 seconden verandert de beweging van toenemend stijgend naar afnemend daland.

**b** Bij 7.0 s is de afgeleide 0. Dit betekent dat de bovenste grafiek hier een extreme waarde moet hebben en dat klopt met de grafiek.

**c** Na 7,0 s is de waarde van de afgeleide negatief

**d** Bij 3,6 s is de helling van de raaklijn gelijk aan 5 m/s.




**e** Het mannetje staat 10 m links van de oorsprong stil en begint na ongeveer 1,2 s naar rechts te lopen met toenemende snelheid en daarna met afnemende snelheid totdat hij na 6,0 s stilstaat op 5 m rechts van de oorsprong. Bij 3,6 s heeft hij de maximale snelheid van 5 m/s.

**f** Als de plaatsgrafiek in onderstaande figuur een maximum of minimum heeft is de afgeleide 0 omdat er dat tijdstip geen verandering van plaats is. De helling van de raaklijn is 0.

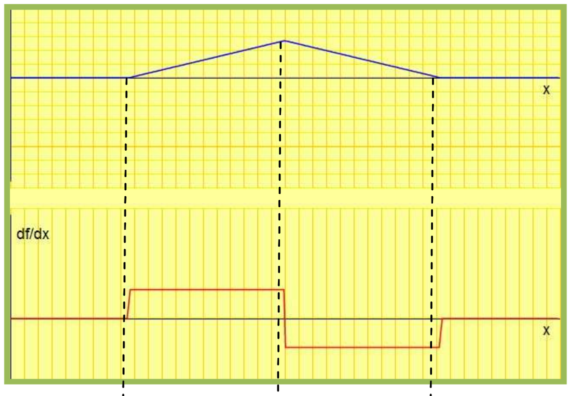
**g** Bij $t = 2,0$ s is de afgeleide maximaal. Dan is de helling van de plaatsgrafiek maximaal.

**Opgave 7.3** **Afgeleide verklaren.**

7.4

Met behulp van de applet‘calculus grapher’ (PhET/University Colorado) kun je een grafiek $f(x)$ maken en meteen de afgeleide $f'(x)$ bekijken.
Verklaar de vorm van de afgeleide in onderstaande grafieken.

**a**

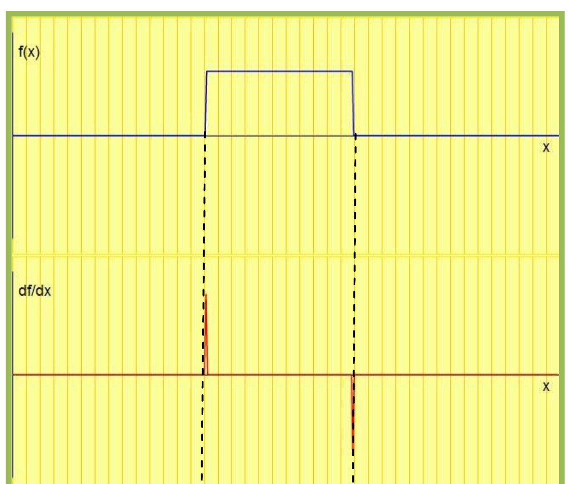



Er is ineens sprake van een helling die hetzelfde blijft tot de top van de driehoek.

De helling verandert van positief naar negatief, de grootte blijft hetzelfde.

Er is ineens sprake van overgang naar hellingwaarde 0.

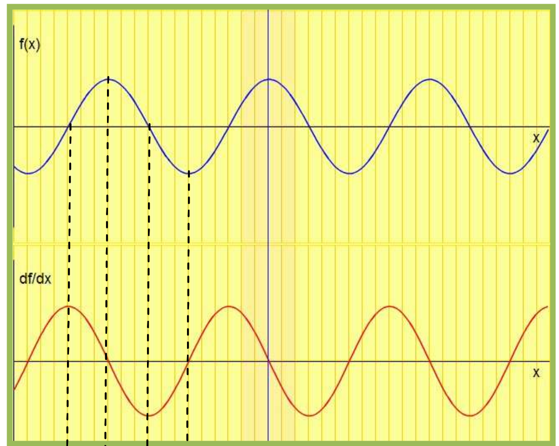
**b**




Er is ineens sprake van een helling en meteen daarna weer geen helling.

Er is ineens sprake van een negatieve helling en meteen daarna weer geen helling.

**c**




De helling is positief en maximaal.

De helling is 0 ,er is sprake van een maximum.

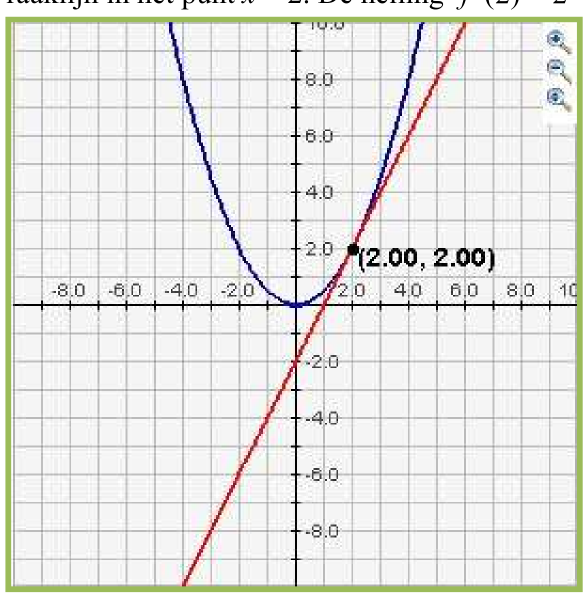
De helling is maximaal maar negatief.

De helling is 0, er is sprake van een mimimum.

## Opgave 7.4 Afgeleide bepalen

7.2

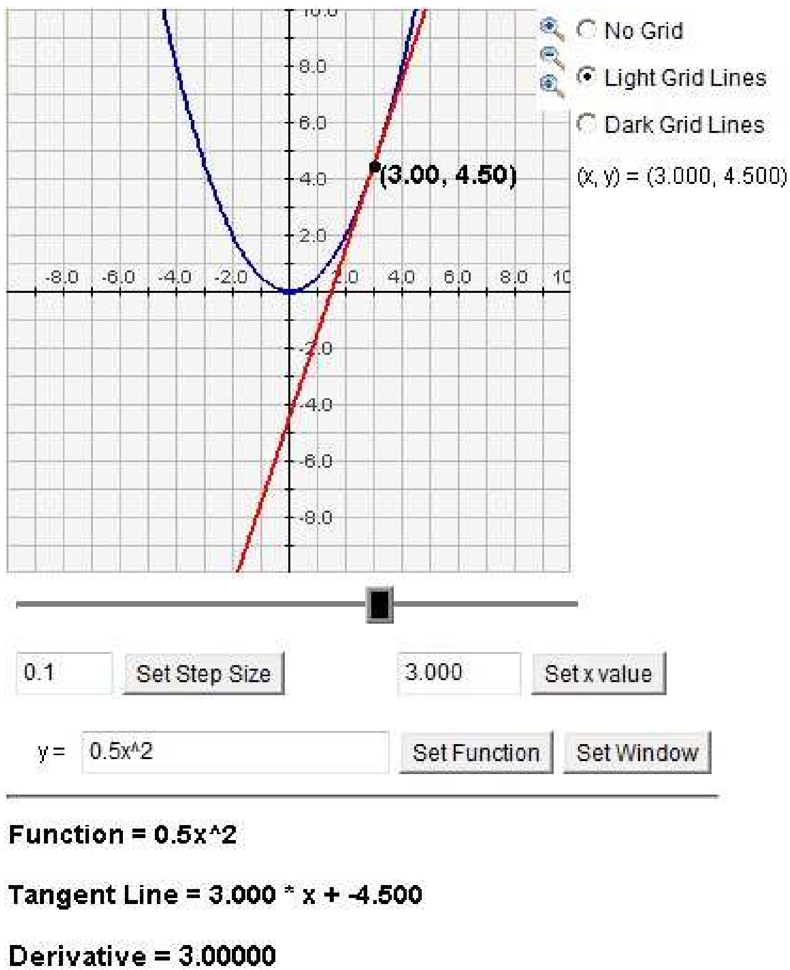
Met behulp van de applet ‘derivate’ (Shodor) kun je een grafiek $f(x)$ tekenen en in ieder punt de helling bepalen.
In onderstaande figuur is de grafiek getekend van $f(x) = 0,5x^2$ en de raaklijn in het punt $x = 2$. De helling $f'(2) = 2$



**a** Bepaal met behulp van applet 7.2 de helling voor verschillende waardes van $x$ voor bovenstaande grafiek van $0{,}5x^2$.

| $x$ | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | 2 | 3 | 4 | 5 |

$\boxed{f'(x) = x}$




**b**

| $x$ | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | -8 | -12 | -16 | -20 |

$\boxed{f'(x) = -4x}$

**c**

| $x$ | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | -8 | -12 | -16 | -20 |

$\boxed{f'(x) = -4x}$

**d**

| $x$ | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | 3 | 3 | 3 | 3 |

$\boxed{f'(x) = 3}$

De helling van $f(x) = 3x$ is voor iedere $x$ gelijk aan 3.

**e** Welk functievoorschrift zal er volgens jou bij de afgeleide van $f(x) = 0{,}5x^2 + 3x + 3$ horen?

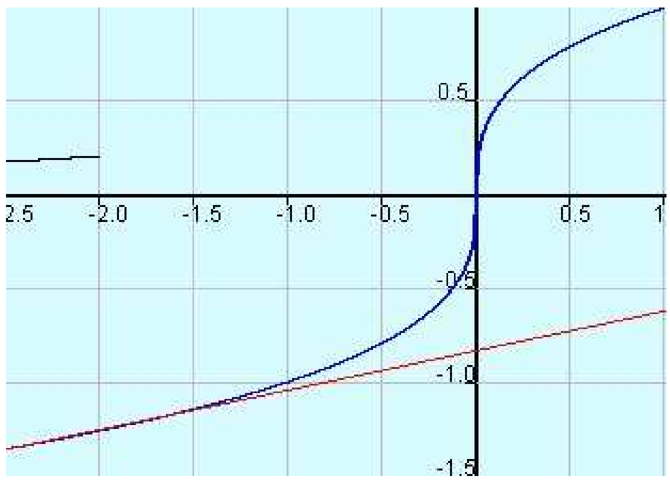
$\boxed{f'(x) = x + 3}$

**Opgave 7.5** **De afgeleide bij een titratiecurve**

7.5

In applet 7.5 wordt van een titratiecurve de afgeleide functie $f'(x)$ bepaald.

**a**




$\boxed{f'(-2) = 0{,}2}$

**b**

$\boxed{f'(-0{,}18) = 1}$

**c**

$\lim\limits_{x \uparrow 0} f'(x) = \infty$

$\lim\limits_{x \downarrow 0} f'(x) = \infty$

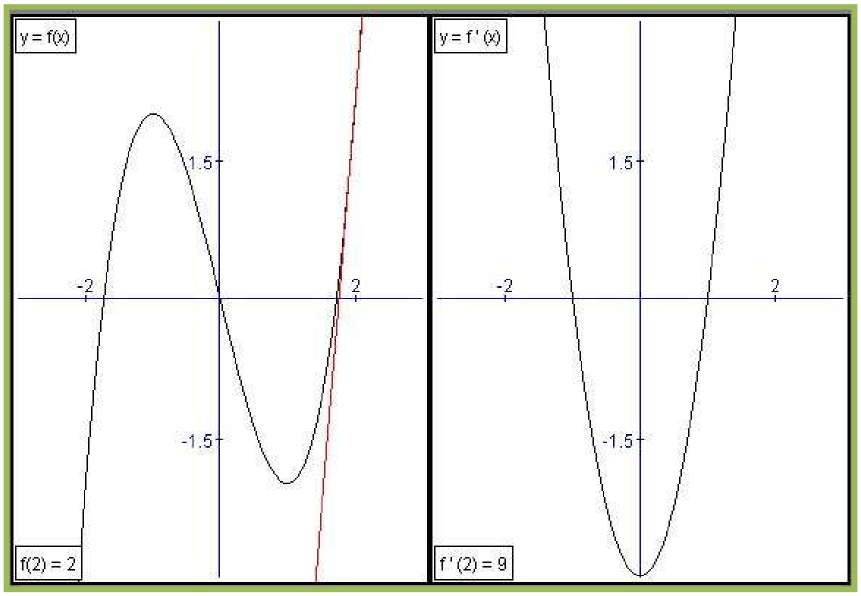
**d** $\lim\limits_{x \to \infty} f'(x) = 0$

Naarmate $x$ toeneemt wordt de helling steeds vlakker

**Opgave 7.6** **De functie $f(x)$ en de afgeleide functie $f'(x)$.**

7.6

Met applet 7.6 wordt van een functie $f(x)$ de afgeleide functie $f'(x)$ bepaald en wordt de grafiek van beide functies getekend.
In onderstaande figuur is de grafiek van $f(x) = x^3 - 3x$ aan de linkerkant en de grafiek van $f'(x) = 3x^2 - 3$ aan de rechterkant afgebeeld.

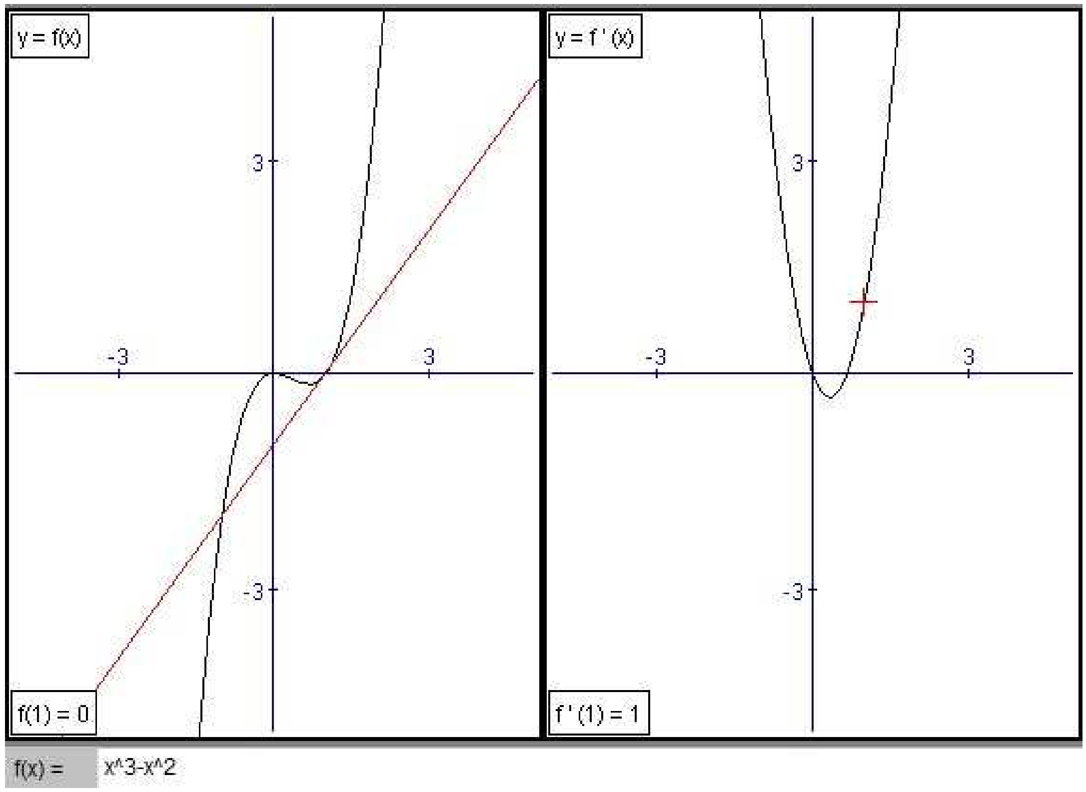



**a** $f'(-1) = 0$ en $f'(1) = 0$
Bij $x = -1$ en $x = 1$ is de helling 0 en is er sprake van een extreme waarde

**b** Voor het interval $-1 < x < 1$ is $f'(x) < 0$.
De afgeleide is negatief dus de helling van $f(x)$ is negatief.

**c** Als de afgeleide een minimum of een maximum heeft de grafiek van de originele functie een buigpunt.
Voor $x = 0$ heeft $f(x)$ een buigpunt. De helling gaat over van toenemend dalend naar afnemend dalend. Bij dit punt is de helling maximaal negatief.

**d** Grafieken van $f(x) = x^3 - x^2$ *en* $f'(x) = 3x^2 - 2x$ zijn in de grafiek hierna afgebeeld.
Er is een maximum voor $x = 0$ en een minimum voor $x = 0{,}67$.
Voor deze waardes van $x$ geldt: $f'(x) = 0$
Voor $x = 0{,}36$ heeft $f'(x)$ een minimum en is negatief.
Er is sprake van een buigpunt en de helling is hier het grootst , maar negatief.




**e** Bij een lineair verband is de helling overal hetzelfde ofwel $f'(x)$ is overal hetzelfde.

**f** Als $f(x) = 0{,}75x + 2 \quad dan \quad f'(x) = 0{,}75$

**Opgave 7.7** **Differentiëren van standaardfuncties.**

**a** $\boxed{f(x) = x^4 \rightarrow f'(x) = 4x^3}$

**b** $\boxed{g(x) = {}^2\log(x) \rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ln(2)}}$

**c** $\boxed{h(x) = \sin(x) \rightarrow f'(x) = \cos(x)}$

**d** $\boxed{k(x) = 2^x \rightarrow f'(x) = 2^x \cdot \ln(2)}$

**e** $\boxed{f(x) = x^4 \rightarrow f'(x) = 4x^3 \rightarrow f'(1) = 4}$

**f**

$$\boxed{\begin{array}{l} y = ax + b \\ y = x + b \\ y(1) = 1 \rightarrow b = 0 \\ vgl.\ raaklijn : y = x \end{array}}$$

**Opgave 7.8** **Differentiëren van samengestelde functies.**

a $\boxed{f(x) = x^2 \cdot 2x = 2x^3 \rightarrow f'(x) = 6 \cdot x^2}$

b $\boxed{f(x) = \sin(x) \times x^2 \rightarrow f'(x) = \cos(x) \cdot x^2 + \sin(x) \cdot 2x}$

c $\boxed{f(x) = x^2 + 2x \rightarrow f'(x) = 2x + 2}$

d $\boxed{f(x) = \sin(x) + x^2 \rightarrow f'(x) = \cos(x) + 2x}$

e $\boxed{f(x) = \dfrac{\sin(x)}{2x} \rightarrow f'(x) = \dfrac{\cos(x) \cdot 2x - 2\sin(x)}{4x^2}}$

**Opgave 7.9** **Differentiëren van samengestelde functies.**

a $\boxed{f(x) = (2x+3)^4 \rightarrow f'(x) = 4 \cdot (2x+3)^3 \cdot 2 = 8(2x+3)^3}$

b $\boxed{\begin{array}{l} f(x) = \sin(x+2)^2 \rightarrow f'(x) = \cos(x+2)^2 \cdot 2(x+2) \\ \rightarrow f'(x) = 2(x+2)\cos(x+2)^2 \end{array}}$

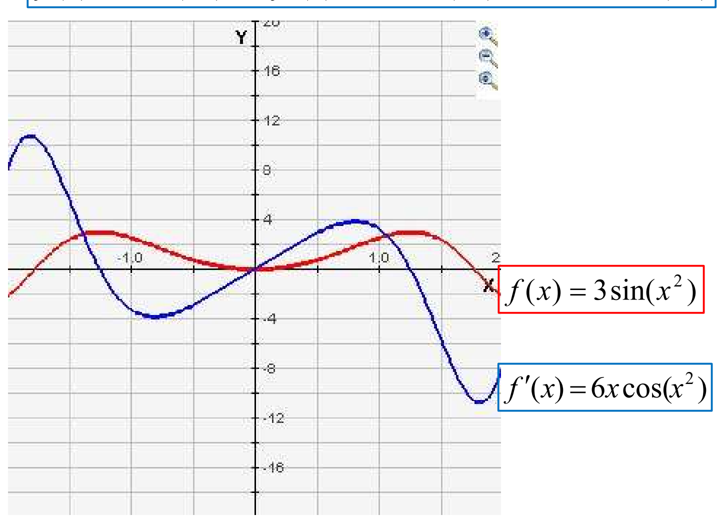
c $\boxed{f(x) = (\sin(x+2))^2 \rightarrow f'(x) = 2\sin(x+2)\cos(x+2)}$

d $\boxed{\begin{array}{l} f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-2} \rightarrow f'(x) = \dfrac{2x \cdot (x-2) - 1 \cdot (x^2+1)}{(x-2)^2} \\ \rightarrow f'(x) = \dfrac{x^2 - 4x - 1}{(x-2)^2} \end{array}}$

e $\boxed{f(x) = x^4 \cdot \sin(x) \rightarrow f'(x) = 4x^3 \cdot \sin(x) + x^4 \cdot \cos(x)}$

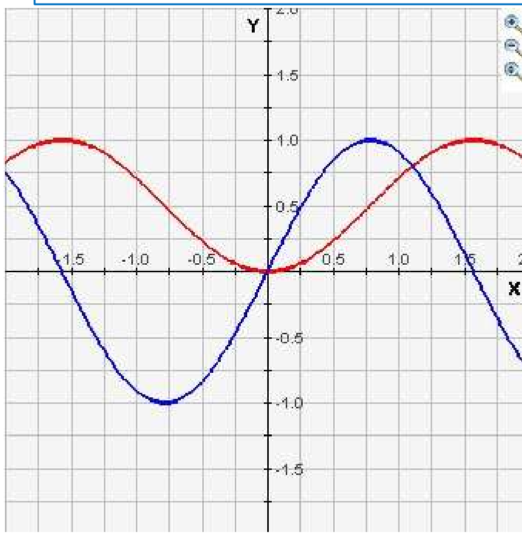
**Opgave 7.10** **Differentiëren van samengestelde functies.**

a $\boxed{f(x) = 3\sin(x^2) \rightarrow f'(x) = 3 \times \cos(x^2) \times 2x = 6x\cos(x^2)}$



Als $f(x)$ een extreme waarde heeft dan $f'(x) = 0$

**b** $f(x) = (\sin(x))^2 \rightarrow f'(x) = 2 \times \sin(x) \times \cos(x) = 2\sin(x)\cos(x)$




$f(x) = (\sin(x))^2$

$f'(x) = 2\sin x \cos(x)$

Als $f(x)$ een extreme waarde heeft dan $f'(x) = 0$

**c** $f(x) = x^2 \cdot e^x \rightarrow f'(x) = x^2 \cdot e^x + 2x \cdot e^x = e^x(x^2 + 2x)$

**d** $f(x) = \dfrac{100 \cdot x}{x + 0{,}5} \rightarrow f'(x) = \dfrac{100 \cdot (x + 0{,}5) - 1 \cdot (100x)}{(x + 0{,}5)^2} = \dfrac{50}{(x + 0{,}5)^2}$

**Opgave 7.11** **De normaalfunctie**

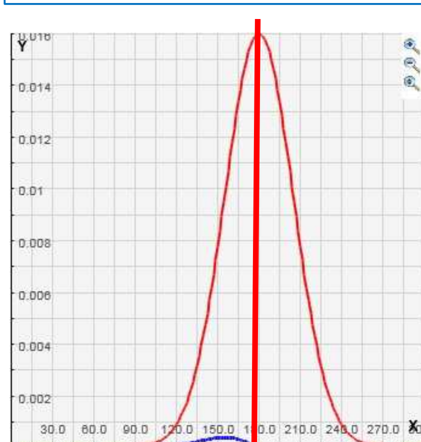
**a**

$$f(x) = 0{,}016 \cdot e^{-0{,}5z^2} \quad met\ z = \frac{x - 180}{25}$$

$$f'(x) = f'(z) \cdot z'(x) \rightarrow f'(x) = 0{,}016 \cdot e^{-0{,}5z^2} \times (-z) \times \frac{1 \times 25 - (x - 180) \times 0}{25^2}$$

$$\rightarrow f'(x) = \frac{-0{,}016z \cdot e^{-0{,}5z^2}}{25}$$

**b**



**Opgave 7.12** **Differentiëren van samengestelde functies.**

**a**

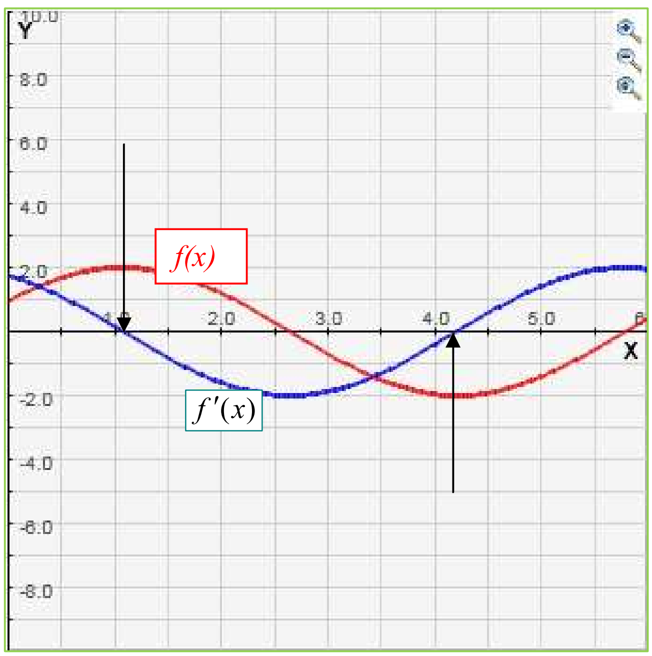
$$f(x) = 5x^2 + 10x + 6 \rightarrow f'(x) = 10x + 10$$
$$f'(x) = 0 \rightarrow 10x + 10 = 0 \rightarrow x = -1$$
$$lokaal\ \min imum : (-1; 1)$$

**b**

$$f - 6x^2 + 6x - 4(x) = -2x^3 + 3x^2 - 4x + 3 \rightarrow f'(x) = -6x^2 + 6x - 4$$
$$-6x^2 + 6x - 4 = 0 \rightarrow 3x^2 - 3x + 2 = 0$$
$$D = 9 - 24 \rightarrow D < 0 \quad geen\ oplos\sin g$$

**c**

$$f(x) = 2\sin(x + 0.5)$$
$$f'(x) = 2\cos(x + 0.5)$$
$$2\cos(x + 0.5) = 0 \rightarrow \cos(x + 0.5) = 0$$
$$\rightarrow (x + 0.5) = \pi / 2 \rightarrow x_1 = 1{,}57 - 0{,}5 = 1{,}07\ rad$$
$$en \quad (x + 0.5) = 2\pi - \pi / 2 \rightarrow x_2 = \frac{3}{2}\pi - 0.5 = 4{,}71 - 0.5 = 4.21\ rad$$

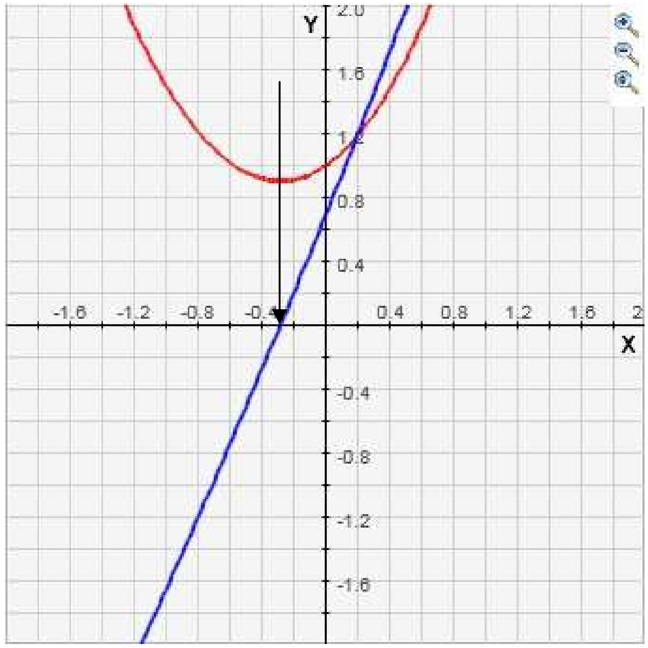



**d**

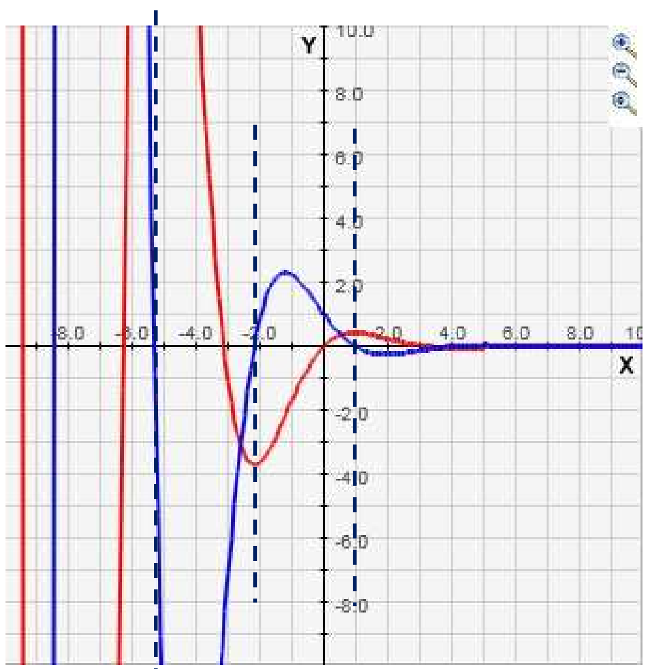
$$f(x) = \frac{2}{x} + x^2 = 2 \cdot x^{-1} + x^2 \rightarrow f'(x) = -2 \cdot x^{-2} + 2x = \frac{-2}{x^2} + 2 \quad x \neq 0$$
$$\frac{-2}{x^2} + 2x = 0 \rightarrow \frac{-2 + 2x^3}{x^2} = 0 \rightarrow 2x^3 = 2 \rightarrow x^3 = 1 \rightarrow x = 1$$

**e**

$$f(x) = 2^x + x^2 \rightarrow f'(x) = 2^x \cdot \ln(2) + 2x$$
$$2^x \cdot \ln(2) + 2x = 0 \rightarrow 2^x = \frac{-2}{\ln(2)} \cdot x \rightarrow 2^x = -2{,}885x$$
$$x = -0{,}28\ zie\ grafiek$$

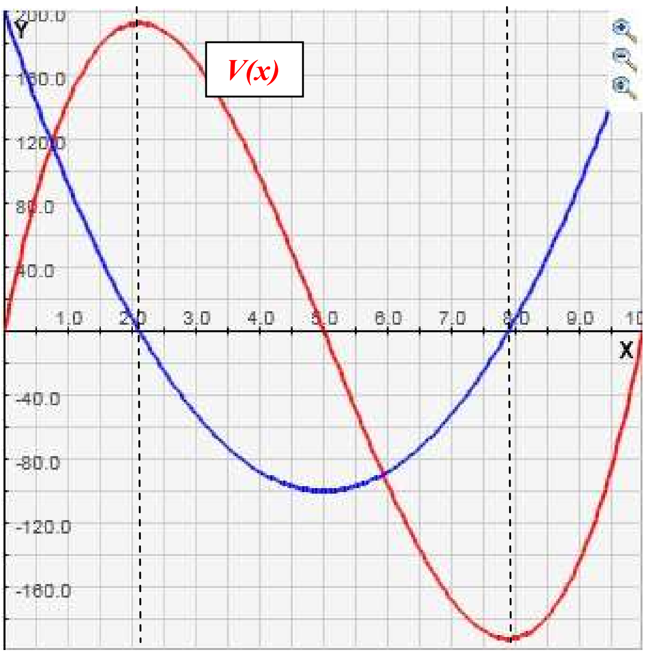



**f** $\boxed{f(x) = 0{,}5^x \cdot \sin(x) \rightarrow f'(x) = 0{,}5^x \cdot \ln(0{,}5) \cdot \sin(x) + 0{,}5^x \cdot \cos(x)}$



**Opgave 7.13** **Wanneer is volume maximaal?**

$$V = A \cdot h \rightarrow V(x) = (20-2x)\cdot(10-2x)\cdot x = (200-40x-20x+4x^2)\cdot x = 4x^3-60x^2+200x$$
$$V'(x) = 12x^2 - 120x + 200$$
$$12x^2 - 120x + 200 = 0 \rightarrow 6x^2 - 60x + 100 = 0 \rightarrow x_{1,2} = \frac{60 \pm \sqrt{3600-2400}}{12}$$
$$x_1 = \frac{60 \pm \sqrt{1200}}{12} = \frac{60 \pm 20\sqrt{3}}{12} = 5 \pm \frac{5}{3}\sqrt{3} = 5 \pm 2{,}89 \rightarrow x_1 = 7{,}89 \quad en\ x_2 = 2{,}11$$
$$V(2{,}11) = 192$$
$$V(7{,}89) = -192 \quad N.V.T$$




**Opgave 7.14** **De wet van Snellius wiskundig bewijzen door optimalisering.**

$$AB = AP + PB$$
$$AP = \sqrt{h_1^{\,2} + x^2}$$
$$PB = \sqrt{h_2^{\,2} + (d-x)^2}$$
$$t = \frac{\sqrt{h_1^{\,2}+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{h_2^{\,2}+(d-x)^2}}{v_2} \rightarrow t = \frac{x}{v_1\cdot\sin(\theta_1)} + \frac{d-x}{v_2\cdot\sin(\theta_2)}$$
$$t'(x) = \frac{v_1\cdot\sin(\theta_1)}{v_1^{\,2}\cdot\sin^2(\theta_1)} - \frac{v_2\cdot\sin(\theta_2)}{v_2^{\,2}\cdot\sin^2(\theta_2)} = \frac{1}{v_1\cdot\sin(\theta_1)} - \frac{1}{v_2\cdot\sin(\theta_2)} \quad extreme\ waarde\ als\ t'(x) = 0$$
$$\frac{1}{v_1\cdot\sin(\theta_1)} - \frac{1}{v_2\cdot\sin(\theta_2)} = 0 \rightarrow \frac{1}{v_1\cdot\sin(\theta_1)} = \frac{1}{v_2\cdot\sin(\theta_2)} \rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{\sin(\theta_1)}{\sin(\theta_2)} = n_{1,2}$$

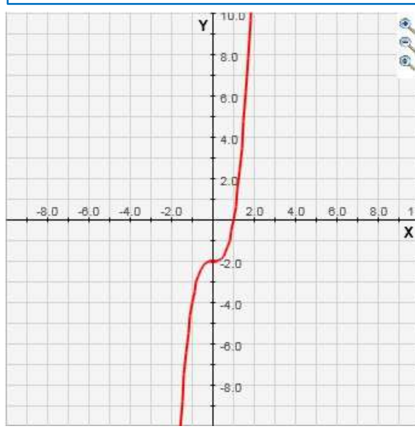
**Opgave 7.15** **Wanneer komt massa het verst?**

$$x(\alpha)=\frac{v^2\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)}{9{,}81}=\frac{0{,}5v^2\cdot\sin(2\alpha)}{9{,}81}$$
$$x'(\alpha)=\frac{0{,}5v^2}{9{,}81}\times 2\times\cos(2\alpha)=\frac{v^2\cdot\cos(2\alpha)}{9{,}81}$$
$$\frac{v^2\cdot\cos(2\alpha)}{9{,}81}=0\rightarrow 2\alpha={}^{\pi}\!/_{2}\rightarrow\alpha={}^{\pi}\!/_{4}\ rad\quad of\quad \alpha=45^o$$

**Opgave 7.16** **Bepaal eerste en tweede afgeleide.**

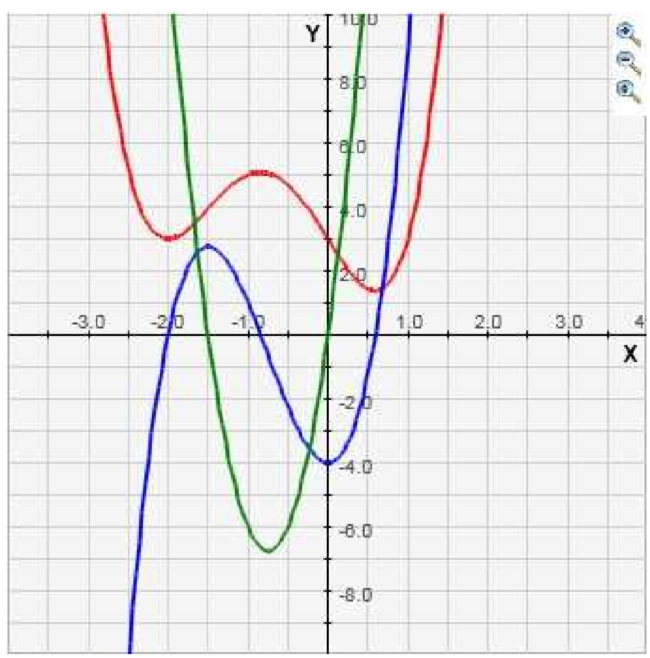
**a**

$$f(x)=2x^3-2\rightarrow f'(x)=6x^2\rightarrow f''(x)=12x$$
$$f'(x)=6x^2=0\rightarrow x=0\quad extreme\ waarde$$
$$f''(x)=12x=0\rightarrow x=0\quad buigpunt$$




**b**

$$f(x)=x^4+3x^3-4x+3$$
$$f'(x)=4x^3+9x^2-4$$
$$extremen\ voor: x=-2\ en\ x=-0{,}8\ en\ x=0{,}6$$
$$f''(x)=12x^2+18x$$
$$buigpunten\ voor: x=-1{,}5\ en\ x=0$$



**c**

$$f(x) = 2\sin(x)$$
$$f'(x) = 2\cos(x) \quad extremen: x = \pi/2 \; en \; x = \frac{3}{2}\pi$$
$$f''(x) = -2\sin(x) \quad buigpunt: x = 0 \; en \; x = \pi$$

**d**

$$f(x) = \frac{2}{x^3} = 2 \cdot x^{-3} \quad x \neq 0$$
$$\rightarrow f'(x) = -6 \cdot x^{-4} \rightarrow f''(x) = 24 \cdot x^{-5}$$
$$omdat \; x \neq 0 \; geen \; exremen \; en \; buigpunt$$

**e**

$$f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x \rightarrow f''(x) = e^x$$
$$geen \; locaal \; extremen; \; geen \; buigpunt$$