2 Kwadratische functies

Opgave 2.1 **De waardes van a, b en c in de drie voorbeeldfuncties.**

a

	1	2	3
x	*v*	*t*	*x*
y	*s*	*h*	*0*
a	*0,064*	*-4,9*	*1,1*
b	*0*	*10*	*-4,75*
c	*0*	*5*	*0,75*

b

$$1,1\cdot x^2-4,75x+0,75=0$$

$$x_1=0,16 \quad en \quad x_2=4,16$$

$$x(dal)=\frac{0,16+4,16}{2}=2,16 \quad klopt\ met\ grafiek$$

tool 2.1

c

a	a > 0 dan krijg je een dalparabool a < 0 dan krijg je een bergparabool kleinere waarde van a geeft een smallere grafiek
b	a en b tegengesteld teken dan top of dal rechts van de *y*-as a en b hetzelfde teken dan top of dal links van de *y*-as
c	c is het snijpunt met de *y*-as

Opgave 2.2 **Oefenen met a(x+p)(x+q) en ax^2 + bx + c**

tool 2.2

a

$$f(x)=a(x+2)(x-5)$$

$$f(x)=0 \quad als\ x=-2\ of\ als\ x=5$$

$$de\ grafiek\ heeft\ 2\ snijpunten\ met\ x-as,\ nl.\ x_1=-2\ en\ x_2=5$$

$$5=a(0+2)(0-5)\rightarrow 5=-10a\rightarrow a=-\frac{5}{10}=-0,5$$

$$f(x)=-0,5(x+2)(x-5)$$

b

$$f(x)=a(x-1)(x-5)$$

$$f(x)=0 \quad als\ x=1\ of\ als\ x=5$$

$$de\ grafiek\ heeft\ 2\ snijpunten\ met\ x-as,\ nl.\ x_1=1\ en\ x_2=5$$

$$-3=a(0-1)(0-5)\rightarrow -3=5a\rightarrow a=-\frac{3}{5}=-0,6$$

$$f(x)=-0,6(x-1)(x-5)$$

c

$$f(x) = a(x+0{,}5)(x-1)$$
$$f(x) = 0 \quad als\ x = -0{,}5\ of\ \ als\ x = 1$$
$$de\ grafiek\ heeft\ 2\ snijpunten\ met\ x-as,\ nl.\ x_1 = -0{,}5\ en\ x_2 = 1$$
$$-2 = a(0+0{,}5)(0-1) \rightarrow -2 = -0{,}5a \rightarrow a = \frac{-2}{-0{,}5} = 4$$
$$f(x) = 4(x+0{,}5)(x-1)$$

d Bereken de coördinaten van het maximum of minimum bij **a** en **b**.

$$opgave\ a \quad x(top) = \frac{x_1 + x_2}{2} \rightarrow x(top) = \frac{-2+5}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$
$$y(top) = -0{,}5 \times 3{,}5 \times 3{,}5 = 6{,}125$$
$$top: (1{,}5\ ;\ 6{,}125)$$

$$opgave\ b \quad x(top) = \frac{x_1 + x_2}{2} \rightarrow x(top) = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3$$
$$y(top) = -0{,}6 \times 2 \times -2 = 2{,}4$$
$$top: (3\ ;\ 2{,}4)$$

e $f(x) = 2(x+2)(x+3) = 2(x^2+5x+6) = 2x^2+10x+12$

f $f(x) = -(x+3)(x-1) = 2(x^2+2x-3) = 2x^2+4x-6$

g $f(x) = -3(x-1)(x+2) = -3(x^2+x-2) = -3x^2-3x+6$

h Teken de snijpunten met de x-as en bereken de plaats van top of dal.

Bij opgave e

$$x_1 = -2 \quad x_2 = -3 \quad en \quad x(dal) = -2{,}5$$
$$y(dal) = 2(-0{,}5)(+0{,}5) = -1$$
$$dal: (-2{,}5\ ;\ -1)$$

Opgave 2.3 **Ontbind in factoren ofwel schrijf in de vorm $f(x) = a(x+p)(x+q)$**

Het ontbinden in factoren lukt alleen met mooie getallen en is bedoeld om de snijpunten met de x-as te bepalen.

tool 2.1

a

$$f(x) = 2x^2+4x-6 = 2(x^2+2x-3)$$
$$zoek\ 2\ getallen\ met\ product\ -3\ en\ som\ +2$$
$$(-1)\times(3) = -3 \quad en \quad (-1)+(3) = 2$$
$$-1 \quad en \quad +3 \quad zijn\ de\ juiste\ getallen$$
$$f(x) = 2(x^2+2x-3) = 2(x-1)(x+3)$$

Controleer je antwoorden met applet 1.3.

b

$$f(x) = -3x^2 - 9x + 12 = -3(x^2 + 3x - 4)$$
$$zoek\ 2\ getallen\ met\ product - 4\ en\ som + 3$$
$$(-1) \times (+4) = -4 \quad en \quad (-1) + (4) = 3$$
$$-1 \quad en \quad +4 \quad zijn\ de\ juiste\ getallen$$
$$f(x) = -3(x^2 + 3x - 4) = -3(x-1)(x+4)$$
Controleer je antwoorden met applet 1.3.

c

$$f(x) = -x^2 + 2x + 24 = -(x^2 - 2x - 24)$$
$$zoek\ 2\ getallen\ met\ product - 24\ en\ som - 2$$
$$(-6) \times (4) = -24 \quad en \quad (-6) + (4) = -2$$
$$-6 \quad en \quad +4 \quad zijn\ de\ juiste\ getallen$$
$$f(x) = -(x^2 - 2x - 24) = -(x-6)(x+4)$$
Controleer je antwoorden met applet 1.3.

d

$$f(x) = 4x^2 - 4 = 4(x^2 - 1)$$
$$zoek\ 2\ getallen\ met\ product - 1\ en\ som\ 0$$
$$(-1) \times (1) = -1 \quad en \quad (-1) + (1) = 0$$
$$-1 \quad en \quad +1 \quad zijn\ de\ juiste\ getallen$$
$$f(x) = 4(x^2 - 1) = 4(x+1)(x-1)$$
Controleer je antwoorden met applet 1.3.

e

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$
$$zoek\ 2\ getallen\ met\ product - 3\ en\ som + 2$$
$$(-1) \times (3) = -3 \quad en \quad (-1) + (3) = +2$$
$$(x+3)(x-1) = 0$$
$$x_1 = -3 \quad en \quad x_2 = 1$$
$$snijpunten\ met\ de\ x-as: (-3\ ;\ 0)\ en\ (1\ ;\ 0)$$

f

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$
$$zoek\ 2\ getallen\ met\ product - 8\ en\ som - 2$$
$$(-4) \times (2) = -8 \quad en \quad (-4) + (2) = -2$$
$$(x+2)(x-4) = 0$$
$$x_1 = -2 \quad en \quad x_2 = 4$$
$$snijpunten\ met\ de\ x-as: (-2\ ;\ 0)\ en\ (4\ ;\ 0)$$

g

$$2x^2 - 8x - 42 = 0 \rightarrow 2(x^2 - 4x - 21) = 0$$
$$zoek\ 2\ getallen\ met\ product - 21\ en\ som - 4$$
$$(3) \times (-7) = -21 \quad en \quad (3) + (-7) = -4$$
$$(x+3)(x-7) = 0$$
$$x_1 = -3 \quad en \quad x_2 = 7$$
$$snijpunten\ met\ de\ x-as: (-3\ ;\ 0)\ en\ (7\ ;\ 0)$$

h

$$-x^2+4x-3=0 \rightarrow x^2-4x+3=0$$
$$(x-1)(x-3)=0$$
$$\textit{snijpunten met de } x-\textit{as}: (1\,;0) \textit{ en } (3\,;0)$$

Opgave 2.4 **Functievoorschrift opstellen bij grafiek.**

tool 2.3

a

$$A: f(x)=a(x+6)(x-6)$$
$$-18=a(0+6)(0-6) \rightarrow a=\frac{-18}{-36}=0{,}5$$
$$\rightarrow f(x)=0{,}5(x-6)(x+6)$$

$$B: f(x)=a(x+2)(x-4)$$
$$-8=a(0+2)(0-4) \rightarrow a=1$$
$$\rightarrow f(x)=(x+2)(x-4)$$

$$C: f(x)=a(x-1)(x-3)$$
$$6=a(-1)(-3) \rightarrow a=\frac{6}{3}$$
$$f(x)=2(x-1)(x-3)$$

$$D: f(x)=a(x+2)(x-4)$$
$$8=a(2)(-4) \rightarrow a=-1$$
$$f(x)=-(x+2)(x-4)$$

b

$$(x-6)(x+6)=x^2+6x-6x-36=x^2-36$$

c Werk haakjes weg bij $(x-6)^2$

$$(x-6)^2=(x-6)(x-6)=x^2-6x-6x+36=x^2-12x+36$$

De term $-6x$ komt $2\times$, $-12x$ wordt het dubbele product genoemd

d

$$x^2-36=(x+6)(x-6)$$

Dit wordt een bijzonder product genoemd van de soort

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

e Welke van de twee onderstaande grafieken hoort bij opgave **c** ?

$(x-6)^2=0$ als $x=6$

De blauwe grafiek heeft een raakpunt bij $x=6$.

Opgave 2.5 **Functievoorschrift in de vorm van $f(x) = a(x + p)^2 + q$**

Door een kwadraat af te splitsen kun je meteen zien waar de top of het dal ligt.

$$f(x) = a(x+p)^2 + q \rightarrow f(x) = a\cdot(x+p)(x+p) + q$$
$$\rightarrow f(x) = a(x^2 + px + px + p^2) + q$$
$$\rightarrow f(x) = ax^2 + 2apx + ap^2 + q$$

tool 2.5

a

$$f(x) = x^2 + 4x + 4$$
$$\rightarrow a = 1$$
$$\rightarrow 2ap = 4 \rightarrow p = 2$$
$$\rightarrow ap^2 + q = 4 \rightarrow q = 0$$
$$\rightarrow f(x) = (x+2)^2$$
$$dal: (-2\,;0)$$

b

$$g(x) = 2x^2 + 4x + 4$$
$$\rightarrow a = 2$$
$$\rightarrow 2ap = 4 \rightarrow p = 1$$
$$\rightarrow ap^2 + q = 4 \rightarrow q = 2$$
$$\rightarrow g(x) = 2(x+1)^2 + 2$$
$$dal: (-1\,;2)$$
$$Als\ x = -1\ dan\ g(-1) = 2$$
$$Voor\ alle\ andere\ waardes\ van\ x\ geldt: g(x) > 2$$

c

$$h(x) = -2x^2 - 4x - 4$$
$$\rightarrow a = -2$$
$$\rightarrow 2ap = -4 \rightarrow p = 1$$
$$\rightarrow ap^2 + q = -4 \rightarrow q = -4 - ap^2 = -2$$
$$\rightarrow h(x) = -2(x+1)^2 - 2$$
$$top: (-1\,;-2)$$
$$Als\ x = -1\ dan\ h(-1) = -2$$
$$Voor\ alle\ andere\ waardes\ van\ x\ geldt: h(x) < -2$$

d

$$k(x) = 3x^2 + 6x$$
$$\rightarrow a = 3$$
$$\rightarrow 2ap = 6 \rightarrow p = 1$$
$$\rightarrow ap^2 + q = 0 \rightarrow q = -3$$
$$\rightarrow k(x) = 3(x+1)^2 - 3$$
$$dal: (-1\,;-3)$$

e

$$
\begin{aligned}
& y = 2x^2 + 4x + 2 \\
& \to a = 2 \\
& \to 2ap = 4 \to p = 1 \\
& \to ap^2 + q = 2 \to q = 0 \\
& \to y = 2(x+1)^2 \\
& dal : (-1\,;\,0)
\end{aligned}
$$

f

$$
\begin{aligned}
& y = -x^2 - 2x - 2 \\
& \to a = -1 \\
& \to 2ap = -2 \to p = 1 \\
& \to ap^2 + q = -2 \to q = -1 \\
& \to y = -(x+1)^2 - 1 \quad top : (-1\,;-1)
\end{aligned}
$$

Opgave 2.6

tool 2.6

Gebruik van de abc-formule.

a

$$
\begin{aligned}
& f(x) = 2x^2 - 8x + 4 \\
& D = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 2 \times 4 = 32 \quad dus\ 2\ oplossingen \\
& x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \to x_{1,2} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{32}}{4} \\
& exact : x_1 = \frac{8 - 4\sqrt{2}}{4} = 2 - \sqrt{2} \quad en \quad x_2 = \frac{8 + 4\sqrt{2}}{4} = 2 + \sqrt{2} \\
& afgerond : x_1 = 2 - 1{,}41 = 0{,}59 \quad en \quad x_2 = 2 + 1{,}41 = 3{,}41 \\
& dal : x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{4} = 2 \to f(2) = 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 4 = -4 \\
& \to dal : (2\,;-4)
\end{aligned}
$$

b

$$
\begin{aligned}
& f(x) = -x^2 - x + 9 \\
& D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times -1 \times 9 = 37 \quad dus\ 2\ oplossingen \\
& x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \to x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{37}}{-2} \\
& exact : x_1 = \frac{1 - \sqrt{37}}{-2} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{37} \quad en \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{37}}{-2} = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{37} \\
& afgerond : x_1 = 2{,}54 \quad en \quad x_2 = -3{,}54 \\
& dal : x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{-2} = -0{,}5 \to f(-0{,}5) = -(-0{,}5)^2 - (-0{,}5) + 9 = 9{,}25 \\
& \to dal : (-0{,}5\,;\,9{,}25)
\end{aligned}
$$

c

$$f(x) = 2x^2 - 5x + 5$$
$$D = b^2 - 4ac = 25 - 4 \times 2 \times 5 = -15 \quad \textit{dus geen oplossingen}$$
$$dal: x = \frac{-b}{2a} \rightarrow x = \frac{5}{4} \rightarrow f(1,25) = 2 \cdot (1,25)^2 - 5 \times 1,25 + 5 = 1,875$$
$$\rightarrow dal: (1,25; 1,875)$$

d

$$f(x) = 3x^2 + 3$$
$$D = b^2 - 4ac = 0 - 4 \times 3 \times 3 = -36 \quad \textit{dus geen oplossingen}$$
$$dal: x = \frac{-b}{2a} \rightarrow x = \frac{0}{4} = 0 \rightarrow f(0) = 3$$
$$\rightarrow dal: (0\,;3)$$

e

$$m(x) = -f(x) \rightarrow m(x) = -(2x^2 - 8x + 4) = -2x^2 + 8x - 4$$
$$D = b^2 - 4ac = 64 - 4 \times -2 \times -4 = 32 \quad \textit{dus 2 oplossingen}$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \rightarrow x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{32}}{-4}$$
$$x_1 = \frac{-8 + 4\sqrt{2}}{-4} = 2 - \sqrt{2} \quad en \quad x_2 = \frac{-8 - 4\sqrt{2}}{-4} = 2 + \sqrt{2}$$
$$dal: x = -\frac{b}{2a} = 2 \rightarrow f(2) = -2 \times 2^2 + 8 \times 2 - 4 = 4$$
$$\rightarrow dal: (2\,;4)$$

De y-waarde van $m(x)$ is overal even groot als de y-waarde van $f(x)$, maar dan gespiegeld t.o.v. de x-as.

f

$$n(x) = 2f(x) \rightarrow m(x) = 2 \cdot (2x^2 - 8x + 4) = 4x^2 - 16x + 8$$
$$D = b^2 - 4ac = 256 - 4 \times 4 \times 8 = 128 \quad \textit{dus 2 oplossingen}$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \rightarrow x_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{128}}{8}$$
$$x_1 = \frac{16 - 8\sqrt{2}}{8} = 2 - \sqrt{2} \quad en \quad x_2 = \frac{16 + 8\sqrt{2}}{8} = 2 + \sqrt{2}$$
$$dal: x = -\frac{b}{2a} = 2 \rightarrow f(2) = 4 \times 2^2 - 16 \times 2 + 8 = 8$$
$$dal: (2\,;8)$$

De y-waarde van $n(x)$ is overal 2× zo groot dan de y-waarde van $f(x)$.

Opgave 2.7 **Snijpunten bepalen met de x –as.**

tool 2.1

a

$$f(x) = x^2 - 4 = (x+2)(x-2) \quad \textit{dalparabool, want } a > 0$$
$$\textit{coordinaten snijpunten}: (-2\,;0) \textit{ en } (2\,;0)$$
$$\textit{coordinaten dal}: (0\,;-4)$$

b

$$f(x) = -2x^2 + 4x - 2 \quad \textit{bergparabool, want } a < 0$$
$$-2x^2 + 4x - 2 = 0 \rightarrow -x^2 + 2x - 1 = 0 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$
$$\rightarrow (x-1)^2 = 0 \quad \textit{type}: (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$
$$\textit{coordinaten raakpunt}: (1;0)$$
$$\textit{coordinaten top}: (1\,;0)$$

c

$$f(x) = -2x^2 + 4 \quad \textit{bergparabool, want } a < 0$$
$$-2x^2 + 4 = 0 \rightarrow x^2 - 2 = 0$$
$$\rightarrow (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0 \quad \textit{type}: a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$
$$\textit{coordinaten snijpunten}: (\sqrt{2};0) \textit{ en } (-\sqrt{2}\,;0)$$
$$\textit{coordinaten top}: (0\,;-2)$$

d

$$f(x) = 3(x-4)^2 \quad \textit{bergparabool, want } a > 0$$
$$3(x-4)^2 = 0 \rightarrow (x-4)^2 = 0$$
$$\rightarrow x = 4$$
$$\textit{coordinaten raakpunt}: (4;0)$$
$$\textit{coordinaten dal}: (4\,;0)$$

e

$$f(x) = 3 - x^2 \quad \textit{bergparabool, want } a < 0$$
$$3 - x^2 = 0 \rightarrow x^2 - 3 = 0$$
$$\rightarrow (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 0$$
$$\textit{coordinaten snijpunten}: (-\sqrt{3};0) \textit{ en } (\sqrt{3};0)$$
$$\textit{coordinaten top}: (0\,;3)$$

f

$$f(x) = 4(x+2)^2 \quad \textit{dalparabool, want } a > 0$$
$$(x+2)^2 = 0 \rightarrow x = -2$$
$$\textit{coordinaten raakpunt}: (-2;0)$$
$$\textit{coordinaten dal}: (-2\,;0)$$

g

$$k(x) = -2x^2 - 4 \quad \textit{bergparabool, want } a > 0$$
$$-2x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = -2$$
$$\text{geen oplossing}$$
$$\textit{coordinaten dal}: (0\,;-4)$$

Top ligt onder de x-as, dus geen snijpunten!

h

$$rood: f(x) = 4(x-1)(x+1) = 4(x^2-1) = 4x^2-4$$
$$blauw: g(x) = -4(x-1)(x+1) = -4x^2+4$$

Opgave 2.8 **Ontbind de volgende functies in factoren.**

tool 2.1

a

$$f(x) = 2x^2 - 7 = 2(x^2 - \frac{7}{2}) = 2(x+\sqrt{\frac{7}{2}})(x-\sqrt{\frac{7}{2}})$$

b

$$f(x) = 2x^2 - 7x = 2x \cdot (x - \frac{7}{2})$$

c

$$f(x) = x^2 + 4$$
$$kan\ niet\ in\ factoren\ ontbonden\ worden$$

d

$$f(x) = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 = (x-3)(x-3)$$

e

$$f(x) = 2x^2 + 12x + 18 = 2(x^2 + 6x + 9) = 2(x+3)^2$$
$$\rightarrow 2(x+3)(x+3)$$

f

$$f(x) = 9x^2 - 16 = 9 \cdot (x^2 - \frac{16}{9}) = 9 \cdot (x - \frac{4}{3})(x - \frac{4}{3})$$

g

$$f(x) = -2x^2 + 2x + 12 = -2(x^2 - x - 6) = -2(x-3)(x+2)$$

h

$$f(x) = x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4)$$

Opgave 2.9 **Verschuiven van grafieken.**

tool 2.1

a

$$f(x) = a(x+1)(x-3) \rightarrow x(dal) = \frac{-1+3}{2} = 1$$
$$dal: (1\,;-3)$$
$$-3 = a \cdot (2) \cdot (-2) \rightarrow a = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$
$$f(x) = \tfrac{3}{4} \cdot (x+1)(x-3)$$

b

$$f(x) = \tfrac{3}{4} \cdot (x-2+1)(x-2-3) = \tfrac{3}{4} \cdot (x-1)(x-5)$$

c

$$f(x) = \tfrac{3}{4} \cdot (x+3+1)(x+3-3) = \tfrac{3}{4} \cdot (x+4)(x)$$
$$\rightarrow f(x) = \tfrac{3}{4} x \cdot (x+4)$$

d

$$f(x) = \tfrac{3}{4} \cdot (x+1)(x-3) - 2$$

e

$$f(x) = \tfrac{3}{4} \cdot (x-1)(x-1) + 1$$

f

$$f(x)=\tfrac{3}{4}\cdot(x-1)(x-5)=\frac{3}{4}\cdot(x^2-6x+5)=\tfrac{3}{4}\cdot x^2-4\tfrac{1}{2}\cdot x+3\tfrac{3}{4}$$
$$g(x)=\tfrac{3}{4}x\cdot(x+4)=\tfrac{3}{4}x^2+3x$$
$$h(x)=\tfrac{3}{4}\cdot(x+1)(x-3)-2=\tfrac{3}{4}(x^2-2x-3)=\tfrac{3}{4}x^2-\tfrac{3}{2}x-2\tfrac{1}{4}$$

oefenen 1.2

Extra oefeningen op de WIMS-site. Items 1 en 5

Opgave 2.10

Een derdegraads functie kan 3 snijpunten hebben.

tool 2.1

a

$$f(x)=2(x+2)(x-1)(x-3)$$
$$\to f(x)=2(x+2)(x^2-4x+3)=2(x^3-4x^2+3x+2x^2-8x+6)$$
$$\to 2x^3-4x^2-10x+12$$

Teken met tool 2.1 eerst de grafiek van het voorschrift met haakjes en vervolgens van het voorschrift zonder haakjes. Als de tweede grafiek over de eerste getekend wordt is de uitwerking correct. Op deze manier kun je deze tool gebruiken als controlemiddel.

b

$$f(x)=2(x+2)(x-1)(x-3)$$
$$f(0)=2\cdot(2)(-1)(-3)=12 \quad of \quad f(0)=2\cdot0-4\cdot0-10\cdot0+12=12$$

c

$$f(x)=2x^3-4x^2-10x+12+\mathbf{8}=2x^3-4x^2-10x+20$$

De grafiek moet 8 schaaldelen omhoog verplaatst worden.

d

$$f(x)=2(x-1+2)(x-1-1)(x-1-3)$$
$$\to f(x)=2\cdot(x+1)(x-2)(x-4)$$

De grafiek is 1 schaaldeel naar rechts verschoven.

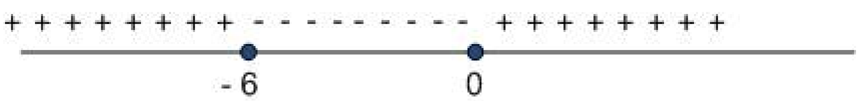
Opgave 2.11

Grafieken vergelijken.

tool 2.9

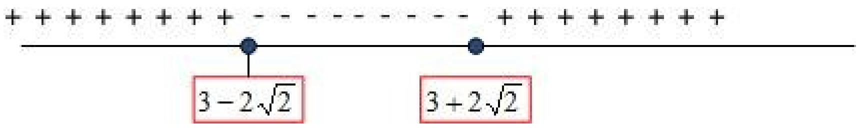
a

$$x^2+6x-2>-2 \quad of \quad f(x)>-2$$
$$\to x^2+6x-2=-2 \to x^2+6x=0$$
$$\to x(x+6)=0$$
$$dalparabool\ met\ snijpunten\ voor\ x=0\ en\ x=-6$$
$$x^2+6x>0 \quad als$$
$$x<-6 \quad of \quad x>0$$



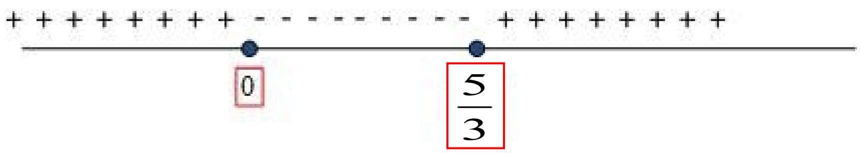
b

$$x^2 - 4x - 2 > 2x - 3 \quad \textit{of} \quad f(x) > g(x)$$
$$\rightarrow x^2 - 4x - 2 = 2x - 3$$
$$\rightarrow x^2 - 6x + 1 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-4}}{2} \rightarrow x_{1,2} = \frac{6 \pm 4\sqrt{2}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$$
$$\textit{dalparabool met snijpunten voor } x = 3 - 2\sqrt{2} \textit{ en } x = 3 + 2\sqrt{2}$$
$$f(x) > g(x) \quad \textit{of} \quad f(x) - g(x) > 0 \quad \textit{of} \quad x^2 - 6x + 1 > 0$$
$$\textit{als } x < (3 - 2\sqrt{2}) \quad \textit{of} \quad x > (3 + 2\sqrt{2})$$
$$\textit{of afgerond}: x < 0{,}172 \quad \textit{of} \quad x > 5{,}83$$



c

$$2x^2 - 5x - 4 > -x^2 - 4 \quad \textit{of} \quad f(x) > g(x)$$
$$\rightarrow 3x^2 - 5x = 0 \rightarrow 3x \cdot (x - 5/3) = 0$$
$$\textit{dalparabool met snijpunten voor } x = 0 \textit{ en } x = 5/3$$
$$\rightarrow f(x) > g(x) \quad \textit{of} \quad 3x^2 - 5x > 0$$
$$x < 0 \quad \textit{of} \quad x > 5/3$$



d

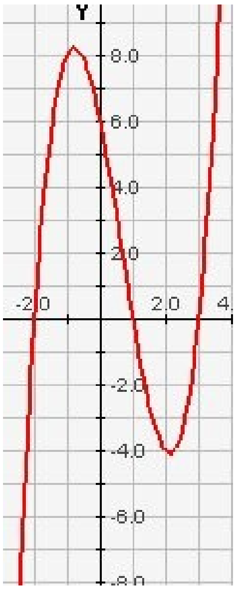
$$-3x^2 - 3x + 2 > 3x^2 + 3x - 2 \quad \textit{of} \quad f(x) > g(x)$$
$$\rightarrow -6x^2 - 6x + 4 = 0 \quad \rightarrow D = b^2 - 4ac = 36 - 4 \times -6 \times 4 = 132$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \rightarrow x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{132}}{-12} = -1/2 \pm 1/6\sqrt{33}$$
$$\textit{bergparabool met } x_1 = -1/2 - 1/6\sqrt{33} \textit{ en } x_2 = -1/2 + 1/6\sqrt{33}$$
$$f(x) > g(x) \quad \textit{of} \quad -6x^2 - 6x + 4 > 0 \quad \textit{als}$$
$$(-1/2 - 1/6\sqrt{33}) < x < -1/2 + 1/6\sqrt{33}$$
$$\textit{of afgerond}: -1{,}46 < x < 0{,}46$$

e

$$4x^2 - 8x + 4 > 4(x+1)^2 - 8(x+1) + 4 \quad \textit{of} \quad f(x) > g(x)$$
$$4x^2 - 8x + 4 = 4x^2 + 8x + 4 - 8x - 8 + 4$$
$$\rightarrow -8x + 4 = 0 \rightarrow x = 1/2$$
$$f(x) - g(x) > 0 \quad \textit{of} \quad -8x + 4 > 0 \quad \textit{of} \quad 8x < 4 \rightarrow x < 0{,}5$$
$$f(x) > g(x) \quad \textit{als} \quad x < 0{,}5$$

f

$$-2x+1>(-2x+1)(x-3) \quad of \quad f(x)>g(x)$$
$$\rightarrow -2x+1=-2x^2+7x-3 \quad \rightarrow -2x^2+9x-4=0$$
$$x_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{81-32}}{4}\rightarrow x_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{49}}{4}=\tfrac{9}{4}\pm\tfrac{7}{4}$$
$$dalparabool\ met\ snijpunten\ voor\ x_1=\tfrac{1}{2}\ en\ x_2=4$$
$$2x^2-9x+4>0$$
$$als\ x<\tfrac{1}{2} \quad of \quad x>4$$

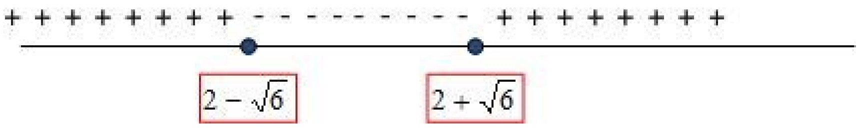


g

$$(x-1)(x+2)(x-3)>0$$
$$-2<x<1 \quad of \quad x>3$$

h

$$x^2-4x-2>2\cdot(x^2-4x-2) \quad f(x)>g(x)$$
$$\rightarrow x^2-4x-2=2x^2-8x-4$$
$$\rightarrow -x^2+4x+2=0$$
$$x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16+8}}{2}\rightarrow x_{1,2}=\frac{4\pm2\sqrt{6}}{2}=2\pm\sqrt{6}$$
$$bergparabool\ met\ snijpunten\ voor\ x_1=2-\sqrt{6}\ en\ x_2=2+\sqrt{6}$$
$$-x^2+4x+2>0$$
$$als\ (2-\sqrt{6})<x<(2+\sqrt{6})$$
$$of\ \ afgerond: -0,45<x<4,45$$



Opgave 2.12 **Snijpunten bepalen 1.**

tool 2.9

a

$$2x-6=-2x^2+12x-14$$
$$\rightarrow 2x^2-10x+8=0\rightarrow x^2-5x+4=0$$
$$\rightarrow (x-4)(x-1)=0\rightarrow x_1=1\ en\ x_2=4$$
$$\rightarrow y_1=-4\ en\ y_2=2$$
$$snijpunten: (1\,;-4)\ en\ (4\,;2)$$

b

$$2x-3=\tfrac{1}{3}x^2$$
$$\rightarrow \tfrac{1}{3}x^2-2x+3=0\rightarrow x^2-6x+9=0$$
$$\rightarrow (x-3)^2=0\rightarrow x=3$$
$$\rightarrow y=3$$
$$raakpunt: (3\,;3)$$

c

$$-\frac{1}{2}x-2=\frac{1}{4}x^2+x-2\frac{1}{2}$$
$$\rightarrow {}^1\!/\!_4\,x^2+{}^3\!/\!_2\,x-\frac{1}{2}=0\rightarrow x^2+6x-2=0$$
$$\rightarrow x_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{36+8}}{2}=\frac{-6\pm2\sqrt{11}}{2}$$
$$\rightarrow x_1=-3-\sqrt{11}\quad en\ x_2=-3+\sqrt{11}$$

$$\rightarrow y_1=-\frac{1}{2}(-3-\sqrt{11})-2=-{}^1\!/\!_2+{}^1\!/\!_2\sqrt{11}$$
$$y_2=-\frac{1}{2}(-3+\sqrt{11})-2=-{}^1\!/\!_2-{}^1\!/\!_2\sqrt{11}$$
$$snijpunten: afgerond: (-6{,}32\ ;1{,}16)\ en\ (0{,}32\ ;-2{,}16)$$

d

$$2x^2=-x^2+4x-1$$
$$\rightarrow 3x^2-4x+1=0$$
$$\rightarrow x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{6}=\frac{4\pm2}{6}$$
$$\rightarrow x_1={}^1\!/\!_3\quad en\ x_2=1$$
$$\rightarrow y_1={}^2\!/\!_9=-{}^1\!/\!_2+{}^1\!/\!_2\sqrt{11}\ en\ y_2=2$$
$$snijpunten: afgerond: ({}^1\!/\!_3\ ;{}^2\!/\!_9)\ en\ (1\ ;2)$$

Opgave 2.13 **Snijpunten bepalen 2.**

tool 2.8

a

$$x^2+1=ax\rightarrow x^2-ax+1=0$$
$$\rightarrow D=(-a)^2-4=a^2-4$$
$$raakpunt\ als\ D=0\rightarrow a^2=4\rightarrow a=\pm2$$
$$geen\ snijpunten\ als\ D<0\rightarrow (a+2)(a-2)<0$$
$$\rightarrow -2<a<2$$

b

$$x^2+a=x\rightarrow x^2-x+a=0$$
$$\rightarrow D=(-1)^2-4a=1-4a$$
$$raakpunt\ als\ D=0\rightarrow 4a=1\rightarrow a={}^1\!/\!_4$$
$$geen\ snijpunten\ als\ D<0\rightarrow 1-4a<0$$
$$\rightarrow a>{}^1\!/\!_4$$

c

$$ax^2+1=ax\rightarrow ax^2-ax+1=0$$
$$\rightarrow D=(-a)^2+4a=a^2+4a=a(a+4)$$
$$raakpunt\ als\ D=0\rightarrow a=0\ \ of\ \ a=-4$$
$$geen\ snijpunten\ als\ D<0\rightarrow a(a+4)<0$$
$$\rightarrow -4<a>0$$

Opgave 2.14 **Stel het functievoorschrift op voor de grafiek.**

tool 2.10

a

$$\begin{aligned}
&2 = a + b + c\\
&6 = a - b + c \quad (-)\\
&-4 = 0 + 2b + 0 \rightarrow b = -2\\[1em]
&6 = a - b + c\\
&3 = 4a + 2b + c \quad (-)\\
&3 = -3a - 3b \rightarrow 3 = -3a - 3 \times -2 \rightarrow a = \frac{-3}{-3} = 1\\[1em]
&c = 2 - a - b = 2 - 1 - (-2) = 3\\
&f(x) = x^2 - 2x + 3
\end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned}
&-4 = 4a - 2b + c\\
&-1 = a + b + c \quad (-)\\
&-3 = 3a - 3b\\[1em]
&-1 = a + b + c\\
&-8 = 4a + 2b + c \quad (-)\\
&7 = -3a - b\\[1em]
&-3 = 3a - 3b\\
&7 = -3a - b \quad (+)\\
&4 = \quad 0 - 4b \rightarrow b = -1\\[1em]
&-3 = 3a - 3 \times -1 \rightarrow a = \frac{-6}{3} = -2\\
&c = -1 - a - b = -1 + 2 + 1 = 2\\
&f(x) = -2x^2 - x + 2
\end{aligned}$$

c

$$\begin{aligned}
&2 = c\\
&4 = 4a + 2b + c \quad (-)\\
&-2 = -4a - 2b\\[1em]
&4 = 4a + 2b + c\\
&2 = 16a + 4b + c \quad (-)\\
&2 = -12a - 2b\\[1em]
&-2 = -4a - 2b\\
&2 = -12a - 2b \quad (-)\\
&-4 = 8a + 0 \rightarrow a = -\tfrac{1}{2}\\[1em]
&-2 = -4 \times -\tfrac{1}{2} - 2b \rightarrow b = \frac{-4}{-2} = 2\\
&f(x) = -\tfrac{1}{2}x^2 + 2x + 2
\end{aligned}$$

Opgave 2.15 **Berekeningen aan de remweg.**

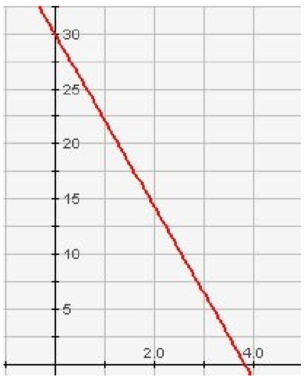
tool 2.11

a $v = -7{,}84t + 30$

v-t- diagram v vertikaal in m/s

b $$hellingsgetal = \frac{-30\ m/s}{-3{,}8\ s} = 7{,}9\ m/s^2$$

Dit is de remvertraging, de afname van de snelheid per seconde



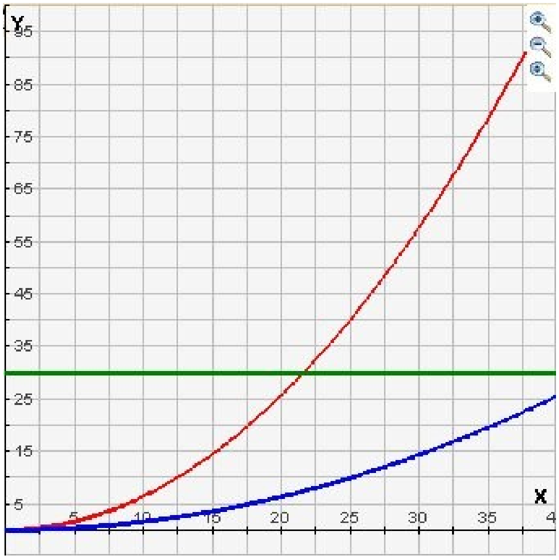
c $v = -7{,}84t + 30$

$v = 0 \rightarrow 7{,}84t = 30 \rightarrow t = \dfrac{30}{7{,}84} = 3{,}83\ s$

d $s_1 = \dfrac{{v_0}^2}{2 \times 0{,}8 \times 9{,}8} = 0{,}0638 \cdot {v_0}^2$

$s_2 = \dfrac{{v_0}^2}{2 \times 0{,}2 \times 9{,}8} = 0{,}0159 \cdot {v_0}^2$

e



Vertikaal is de remweg uitgezet tegen horizontaal de snelheid.
De rode grafiek hoort bij $f = 0{,}8$ (droog)
De blauwe grafiek hoort bij $f = 0{,}2$ (sneeuw)

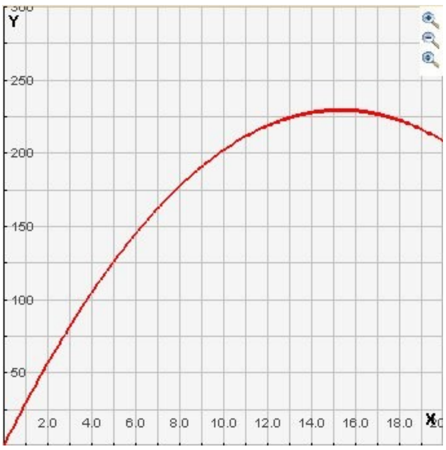
f

De horizontale lijn in de grafiek hoort bij de stilstaande auto.
Conclusie: Als de snelheid bij het remmen op een droog wegdek groter is dan 22 m/s, zal een botsing plaats hebben.

g $s(t) = -0{,}98t^2 + 30t$

h $a = -0{,}98 \quad ; b = 30 \quad ; c = 0$

i



Verticaal is s uitgezet in meter en horizontaal t in seconden.

j

$$t(top) = \frac{-b}{2a} = \frac{-30}{2 \times -0{,}98} = 15{,}3 \text{ s}$$

$$s(top) = -0{,}98 \times (15{,}3)^2 + 30 \times 15{,}3 = 230 \text{ m}$$

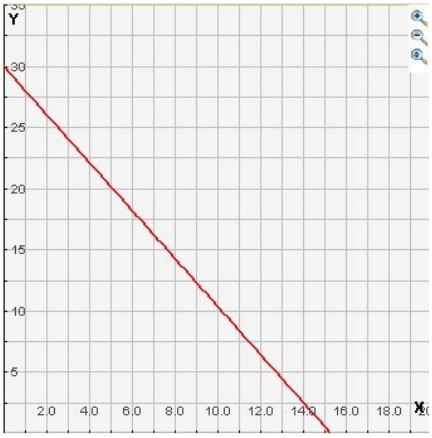
$$\text{top} : (15{,}3 \; ; \; 230)$$

De top geeft aan hoe groot de rem-tijd en de remweg is op het einde van de remweg.

k

$$v(t) = -1{,}96t + 30$$

l



Verticaal is de snelheid uitgezet in m/s en horizontaal de tijd in s.

m

$$v(t) = 0 \rightarrow -1{,}96t + 30 = 0 \rightarrow t = \frac{30}{1{,}96} = 15{,}3 \text{ s}$$

Klopt met antwoord bij vraag j

n

$$s(t) = -0{,}98 \cdot (t-2)^2 + 30 \cdot (t-2)$$

$Op\ t = 2$ is $(t-2) = 0$

Opgave 2.16

Berekeningen aan een kogelbaan.

a

x(0) is de begin-afstand tot het referentiepunt in horizontale richting
y(0) is de begin-afstand tot het referentiepunt in verticale richting

tool 2.12

tool 2.13

b

$$v_0(vertikaal) = 20 \cdot \sin(60^0) = 17{,}3 \,{}^{\text{m}}\!/\!{}_{\text{s}}$$

c

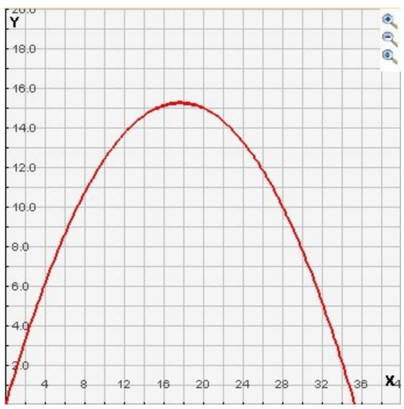
$$x(t) = 10 \cdot t$$

$$y(t) = -4{,}9 \cdot t^2 + 17{,}3 \cdot t$$

$$y = -4{,}9 \cdot \left(\frac{x}{10}\right)^2 + 17{,}3 \cdot \frac{x}{10}$$

$$y = -0{,}049 \cdot x^2 + 1{,}73x$$

Verticaal is de hoogte y in m, horizontaal is de afstand in horizontale richting in m uitgezet.



d

$$y = -0{,}049 \cdot x^2 + 1{,}73x = 0$$
$$y = x(-0{,}049x + 1{,}73)$$
$$\rightarrow x_1 = 0 \text{ m } en\ x_2 = \frac{1{,}73}{0{,}049} = 35{,}3 \text{ m}$$
$$x(top) = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{35{,}3}{2} = 17{,}65 \text{ m} \quad of\ \ x(top) = \frac{-b}{2a} = \frac{-1{,}73}{2 \times -0{,}049} = 17{,}65 \text{ m}$$
$$y(top) = -0{,}049 \times (17{,}65)^2 + 1{,}73 \times 17{,}65 = 15{,}3 \text{ m}$$
$$top : (17{,}65\ ;\ 15{,}3) \text{ m}$$

e

$$op \text{ max } hoogte : v_y = 0$$
$$\rightarrow -9{,}8t + 17{,}3 = 0 \rightarrow t = \frac{-17{,}3}{-9{,}8} = 1{,}765 \text{ s}$$

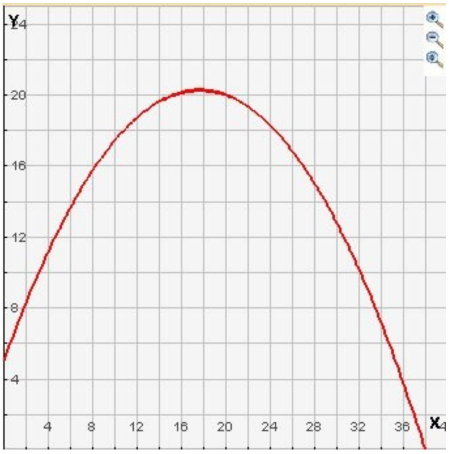
f

$$y(t) = -4{,}9 \cdot t^2 + 17{,}3 \cdot t$$
$$\rightarrow y(1{,}765) = -4{,}9 \times (1{,}765)^2 + 17{,}3 \times 1{,}765 = 15{,}3 \text{ m}$$
$$x(t) = 10 \cdot t$$
$$\rightarrow x(1{,}765) = 17{,}65 \text{ m}$$

Deze waardes kloppen met het antwoord van vraag d)

g

$$x(t) = 10 \cdot t$$
$$y(t) = -4{,}9 \cdot t^2 + 17{,}3 \cdot t + 5$$
$$y = -4{,}9 \cdot \left(\frac{x}{10}\right)^2 + 17{,}3 \cdot \frac{x}{10} + 5$$
$$y = -0{,}049 \cdot x^2 + 1{,}73x + 5$$



h

$$y = -0{,}049 \cdot x^2 + 1{,}73x + 5 = 0$$
$$\rightarrow x_{1,2} = \frac{-1{,}73 \pm \sqrt{1{,}73^2 - 4 \times -0{,}049 \times 5}}{2 \times -0{,}049}$$
$$\rightarrow x_{1,2} = \frac{-1{,}73 \pm 1{,}99}{-0{,}098} \rightarrow x_1 = \frac{0{,}26}{-0{,}098} = -2{,}65 \text{ m}$$
$$\rightarrow x_2 = \frac{-3{,}72}{-0{,}098} = 38{,}0 \text{ m}$$

x_1 en x_2 zijn de plaatsen waar de hoogte nul is.
x_1 is niet van toepassing omdat de kogel wordt weggeschoten vanaf hoogte van 5 meter.

Opgave 2.17 **Berekeningen aan valbeweging.**

tool 2.14

a

$$y(t) = -4{,}9 \cdot t^2 - 10 \cdot t + 20$$
$$\rightarrow y(0) = 20 \text{ m}$$
$$v = -9{,}8 \cdot t - 10 \rightarrow v(0) = -10 \; {}^{m}\!/_{s}$$

b

$$-4{,}9 \cdot t^2 - 10 \cdot t + 20 = 0$$
$$t_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \times -4{,}9 \times 20}}{-9{,}8} = \frac{10 \pm 22{,}2}{-9{,}8}$$
$$t_1 = \frac{32,,2}{-9{,}8} = -3{,}29 \text{ s } en \; t_2 = \frac{-12{,}2}{-9{,}8} = 1{,}24 \text{ s}$$
$$t(top) = \frac{-3{,}29 + 1{,}24}{2} = -1{,}03$$

c

$$B : y(t) = -4{,}9 \cdot (t-1)^2 - 10 \cdot (t-1) + 20$$

Opgave 2.18 **Optimalisering tweedegraads functie.**

tool 2.15

Je hebt een koord met een lengte van 10 m en moet daarmee een zo groot mogelijk rechthoekig oppervlak afzetten.

a

$$B : l + x = 5 \rightarrow l = 5 - x$$
$$\rightarrow A = l \cdot x = (5 - x) \cdot x = 5x - x^2$$

b

$$A = 5x - x^2 = x \cdot (5 - x)$$
$$x_1 = 0 \; en \; x_2 = 5$$

De waardes kloppen, want als $x = 0$ of als x = 5 dan $A = 0$

c De grafiek is een bergparabool met een maximum.

$$A = 5x - x^2 = x \cdot (5 - x)$$
$$x_1 = 0 \; en \; x_2 = 5$$
$$x(top) = \frac{x_1 + x_2}{2} = 2{,}5$$

De oppervlakte is maximaal bij een vierkant van 2,5 × 2,5.

Opgave 2.18 **Evenwichtsreactie in de chemie**

tool 2.17

a

$$\boxed{K = \frac{[N_2O_4]}{[NO_2]^2} \rightarrow [N_2O_4] = 0,75 \cdot a^2}$$

b Zie tool 2.18

tool 2.18