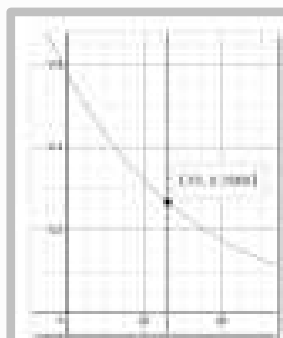
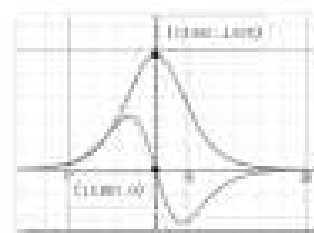


Examentraining met Desmos-tools

Wiskunde A, VWO



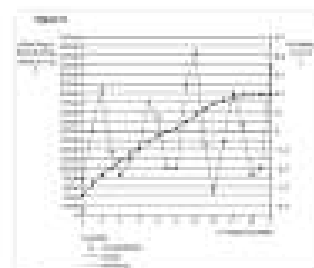
2019-2 antw 7



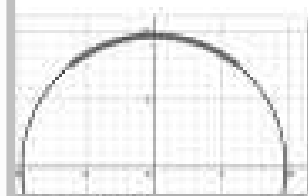
2019-2 antw 9



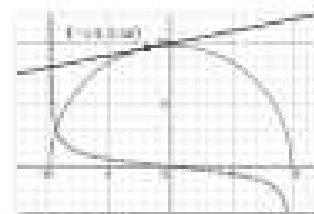
2019-2 opg 11
bijlage



2019-2 opg 11
figuur 2



2021-1 antw 10



2021-1 antw 12

Inhoudsopgave

1. Examenopgaven
2. Uitwerkingen examenopgaven met QR-codes voor Desmos-tools

Domein	Subdomein	in CE	moet in SE	mag in SE
A Vaardigheden		X	X	
B Algebra en tellen	B1: Algebra	X		X
	B2: Telproblemen	X		X
C Verbanden	C1: Standaardfuncties	X		X
	C2: Functies, grafieken, vergelijkingen en ongelijkheden	X		X
D Verandering	D1: Rijen	X		X
	D2: Helling	X		X
	D3: Afgeleide	X		X
E Statistiek en kansrekening	E1: Probleemstelling en onderzoeksontwerp		X	
	E2: Visualisatie van data		X	
	E3: Kwantificering		X	
	E4: Kansbegrip		X	
	E5: Kansverdelingen		X	
	E6: Verklarende statistiek		X	
	E7: Statistiek met ICT		X	
F Keuzeonderwerpen			X	



Syllabus Wiskunde A VWO


























VERANTWOORDING

Deze examenbundel bevat de examenopgaven en de uitwerkingen van het examen wiskunde A VWO van 2018-1/ 2019-1/ 2019-2 / 2021-1/ 2021-2/ 2022-1 /2022-2. Het bijzondere hierbij is dat de uitwerkingen ondersteund worden door tools gemaakt met het programma Desmos. Dit programma is erg gebruiksvriendelijk en zeker ook geschikt om door leerlingen gebruikt te worden. Het controleren van de uitwerking kan daardoor op een interactieve manier gedaan worden. De meest ideale leeromgeving bestaat uit deze examenbundel en een laptop met de interactieve tools. De uitwerkingen in de bundel bevatten QR-codes. Deze kun je scannen met je smartphone en via bijvoorbeeld Whatsapp doorsturen naar je laptop of de laptop van je medeleerling(en).

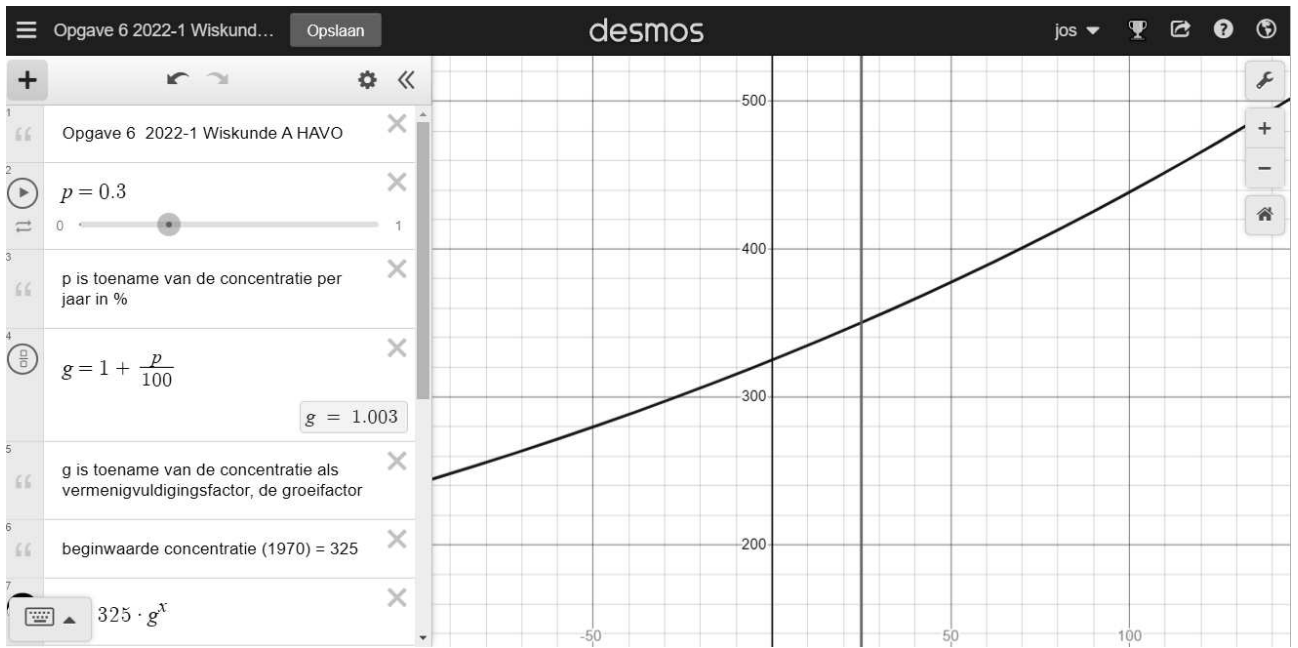
Succes met deze interactieve aanpak,

Jos Vervoort

WERKEN MET DESMOS

1	 Opgave 6 2022-1 Wiskunde A HAVO 	Regel 1 naam van de opgave
2	 $p = 0.3$  0  1 	Regel 2 Groeipercentage p %
3	 p is toename van de concentratie per jaar in % 	Regel 3 Uitleg van regel 2
4	 $g = 1 + \frac{p}{100}$  $g = 1.003$	Regel 4 Groefactor g
5	 g is toename van de concentratie als vermenigvuldigingsfactor, de groefactor 	Regel 5 Uitleg regel 4
6	 beginwaarde concentratie (1970) = 325 	Regel 6 uitleg
7	 $y = 325 \cdot g^x$ 	Regel 7 Formule voor het uitrekenen van de concentratie na x jaar.
8	 $x = 25$  0  30 	Regel 8 Stel de waarde in van x .
9	 y is concentratie na x jaar Als je uitzoomt kun je het verloop zien over een langere periode. 	Regel 9 Uitleg regel 7 en 8
10	 de waarde na 25 jaar bij een toename van 0,3 % per jaar is 350,2... 	Regel 10 Bepalen van de concentratie uit de grafiek.
11	$325 \cdot g^{25}$  $= 350.273019749$	Regel 11 Berekening van de concentratie met de formule.





Gebruik grafische rekenmachine:

De rekenmachine

Bij berekeningen kun je in veel gevallen je rekenmachine gebruiken. Je krijgt dan in het algemeen geen exacte antwoorden maar benaderingen.

Je kunt met je rekenmachine:

- grafieken plotten en tabellen maken
- de toppen van een grafiek vinden
- de snijpunten van grafieken vinden
- vergelijkingen oplossen
- de helling van een grafiek in een punt benaderen
- een hellingsgrafiek plotten

Bij gebruik van je rekenmachine geef je aan hoe je de rekenmachine hebt gebruikt. Daarbij neem je de volgende onderdelen op:

Invoer, Vensterinstelling en de gebruikte Opties.

Als in de opdracht staat: Bereken... of: Los op..., dan heb je de keuze tussen algebraïsch oplossen en oplossen met de rekenmachine.

Als in de opdracht staat : Bereken algebraïsch...of: Los exact op dan moet je het probleem met algebra oplossen. Als je een probleem exact moet oplossen, dan moet het antwoord exact zijn. Moet je een probleem algebraïsch oplossen dan mag het antwoord benaderd worden.

ONDERWERP / OPGAVENUMMER/ DOMEIN / BLZ

2018-1	Windenergie	1-2-3	C	9
	Shannon Index	4-5-6	C/D	14
	Bitcoins	7-8-9-10-11	C	16
	Jaarringen	12-13-14- 15-16	C/D	20
	Toren van achthoeken	17-18-19-20	B/E	25
	Sprinttrein	21	B	28
2019-1	Goudplevieren	1-2-3-4-5	B/C	31
	Kentekens	6-7-8-9	B/C	37
	Verpakkingen	10-11-12-13	B/C/D	40
	Groningse aardbevingen	14-15-16- 17-18-19	B/C/D	44
	Zandpad	20	C	51
2019-2	Continu Vakantie Onderzoek	1-2-3-4-5	B/C/D	53
	Lengtegroei bij jongens	6-7-8-9- 10-11	B/C/D	58
	Wetmatige beweging	12-13-14- 15-16	B/D	64
	De bankenformule	17-18-19- 20	B/C	68
	Kantwerk	21	C	71
2021-1	Linkshandigen en ronde getallen	1-2-3-4-5	B	73
	Draaiend huis	6-7-8-9	B/C	78
	Mathematical bridge	10-11-12	C/D	82
	The International	13-14-15- 16-17	B/C/D	86
	Huurprijzen in New York	18-19-20	B/C	92
	Inkomensongelijkheid	21	B	95

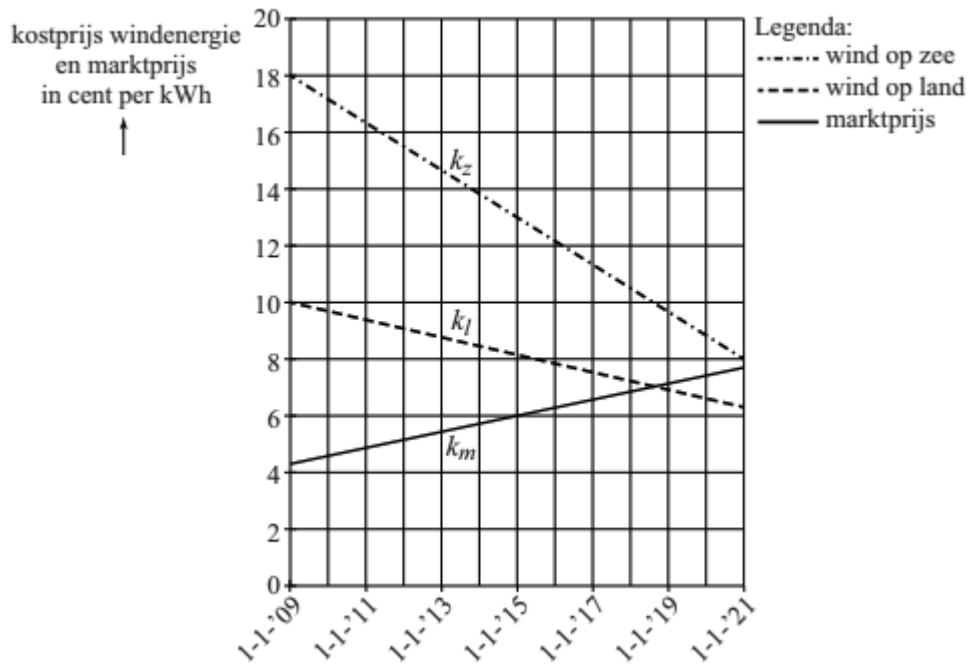
2021-2	Kopgroep	1-2-3-4	B/C/D	98
	Dichtheidshoogte	5-6-7-8-9	B/C/D	101
	Bewegen	10-11-12	C	105
	Kaartenhuis	13-14-15- 16-17	B/C/D	109
	Bevolkingsgroei	18-19-20-21	B/C	113
	Einduitslag Volvo Ocean Race	22	B	117
2022-1	Blindsimultaandammen	1-2-3-4	B/C	120
	Levensverwachting	5-6-7-8	B/C/D	124
	Formule van Camp	9-10-11-12	B/C/D	129
	Bloeddruk	13-14-15- 16	C	132
	Support	17-18-19- 20	C/D	136
	Sjinkie	21	B	139
2022-2	Dauwpunt	1-2-3-4	C	141
	Skutsjesilen	5-6-7-8-9	B/C/D	145
	Waalbrug	10-11-12	C	150
	Bonte vliegenvanger	13-14-15- 16-17	B/C/D	154
	Afname van de kindersterfte in Mali	18-19-20- 21	B/C/D	159
	Rondetijden	22	B / C	162

Opgaven/uitwerkingen 2018-I

2018-I Windenergie C

In een krant stond eind 2013 bij een artikel over de toekomst van windenergie de onderstaande figuur. In de figuur wordt de kostprijs voor het produceren van windenergie vergeleken met de kosten voor het produceren van energie in een traditionele kolencentrale (de marktprijs).

figuur



De grafieken zijn gebaseerd op een model van de werkelijkheid. Met behulp van dit model is het mogelijk om op ieder willekeurig tijdstip de kostprijs van energie uit te rekenen. De formule voor de marktprijs k_m luidt:

$$k_m = 0,28 \cdot t + 4,3$$

De formule voor de kostprijs van windenergie k_l windmolens op land luidt:

$$k_l = -0,31 \cdot t + 10,0$$

Voor beide formules geldt: k is de prijs in cent per kWh (kilowattuur) en t is de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2009.

We nemen in deze opgave aan dat de prijzen zich ook na 2020 volgens deze lineaire verbanden blijven ontwikkelen.

Door de duurdere windmolens op zee is de kostprijs van windenergie van die windmolens op dit moment nog steeds hoger dan die van windmolens op land. Maar door de voortdurende innovaties gaat dat veranderen.

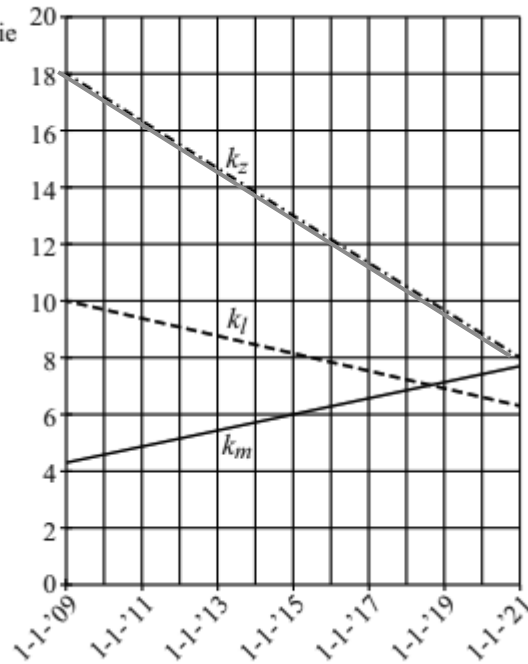
5p	1	<p>Stel met behulp van de figuur een formule op voor de kostprijs k_z van windenergie van windmolens op zee en bereken daarmee in welk jaar de windenergie van land en die van zee evenveel kosten.</p>
4p	2	<p>Rond 2011 was de kostprijs van windenergie van windmolens op land nog tweemaal zo hoog als de marktprijs. Bereken in welk jaar de marktprijs tweemaal zo hoog zal zijn als de kostprijs van windenergie van windmolens op land.</p> <p>In 2009 werd er in totaal 23,4 miljoen MWh energie door kolencentrales geproduceerd (1 MWh is 1 megawattuur, dat is 1000 kWh). De overheid heeft als doelstelling dat op den duur alle energie duurzaam moet worden geproduceerd. Energie die in kolencentrales wordt geproduceerd valt niet onder duurzaam geproduceerde energie.</p> <p>We willen nu een model maken voor de totale kosten TK van de door kolencentrales geproduceerde energie in de jaren 2009-2050. Daarvoor doen we twee aannames:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1 De totale hoeveelheid energie TE die per jaar door kolencentrales geproduceerd wordt, neemt lineair af van 23,4 miljoen MWh in 2009 tot 0 MWh in 2050. Er geldt dan: $TE = 23,4 - \frac{23,4}{41} \cdot j$ <p>In deze formule is TE in miljoenen MWh en j in jaren met $j = 0$ het jaar 2009. Bovendien is j een geheel getal.</p> 2 Om de totale kosten TK van energie te berekenen in een bepaald jaar, gebruiken we de gemiddelde marktprijs g_m in euro per MWh in dat jaar. Er geldt: $g_m = 2,8 \cdot j + 44,4$ <p>In deze formule is g_m in euro per MWh en j in jaren met $j = 0$ het jaar 2009. Ook nu is j een geheel getal.</p> <p>De totale kosten TK in een bepaald jaar zijn te berekenen door de door kolencentrales geproduceerde energie te vermenigvuldigen met de gemiddelde marktprijs in dat jaar. De formule voor TK is te schrijven als</p> $TK = a \cdot j^2 + b \cdot j + c$ <p>In deze formule is TK in miljoenen euro's en j in jaren met $j = 0$ het jaar 2009 en is j een geheel getal.</p>
4p	3	<p>Bereken de waarden van a, b en c in deze formule. Rond je antwoorden af op één decimaal.</p>

2018-I Windenergie C

5p 1

figuur

kostprijs windenergie
en marktprijs
in cent per kWh



$$y = a \cdot x + b$$

$$a = \frac{8-18}{21-9} = -\frac{10}{12} = -\frac{5}{6} = -0,833\dots$$

$$b = 18$$

$$k_z = -0,833\dots \cdot t + 18$$

$$y_1 = -0,833\dots \cdot x + 18$$

$$k_l = -0,31 \cdot t + 10$$

$$y_2 = -0,31x + 10$$

snijpunt van y_1 en y_2 geeft $x = 15,2\dots$

$$\text{jaar} = 2009 + 15 = 2024$$

of

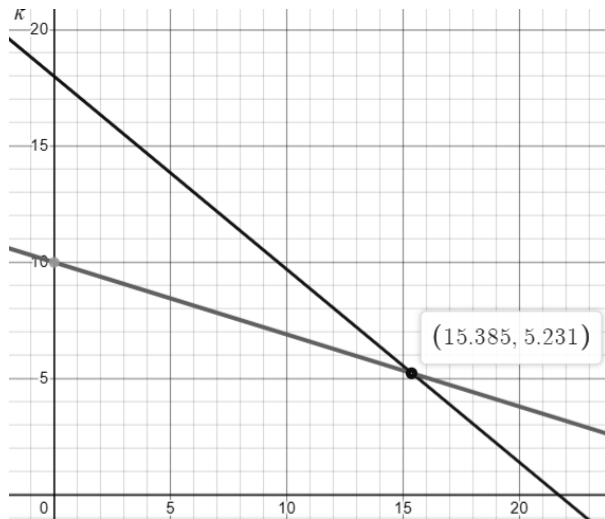
$$-0,833\dots \cdot t + 18 = -0,31 \cdot t + 10$$

$$-0,523\dots \cdot t = -8$$

$$t = 15,2\dots$$

dus in het jaar 2024 $k_z = k_l$

1
1
1
1
1



4p

2

$$k_m = 2 \cdot k_l$$

$$k_m = 0,28 \cdot t + 4,3$$

$$y_1 = 0,28 \cdot x + 4,3$$

$$k_l = (-0,31 \cdot t + 10)$$

$$y_2 = 2 \cdot (-0,31 \cdot x + 10) = 0,62x + 20$$

snijpunt van y_1 en y_2 geeft $x = 17,4...$

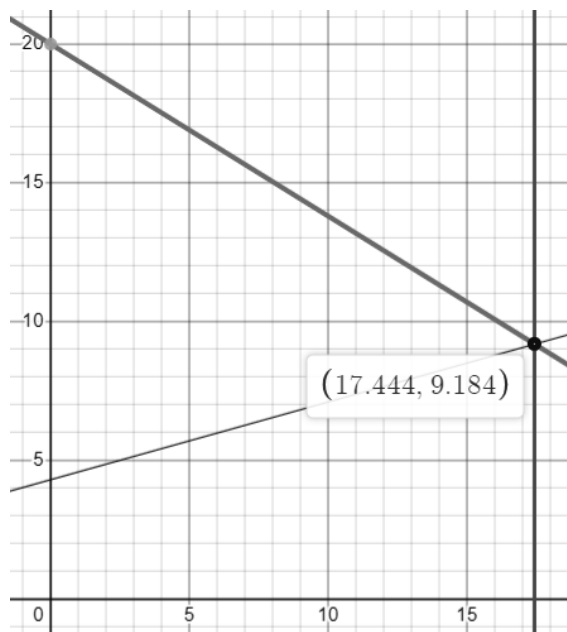
of

$$0,28 \cdot t + 4,3 = -0,62 \cdot t + 20$$

$$0,9t = 15,7$$

$$t = 17,4...$$

In 2026 $k_m = 2 \cdot k_l$



1

1

1

1

4p

3

$$TK = TE \cdot g_m \quad (\text{miljoen euro})$$

$$TK = \left(23,4 - \frac{23,4}{41} \cdot j\right) \cdot (2,8 \cdot j + 44,4)$$

$$TK = 65,52j + 1038,96 - 1,598...x^2 - 25,34...$$

$$TK = 1,6j^2 + 40,2j + 1039,0$$

afgerond op een decimaal

$$a = 1,6$$

$$b = 40,2$$

$$c = 1039,0$$





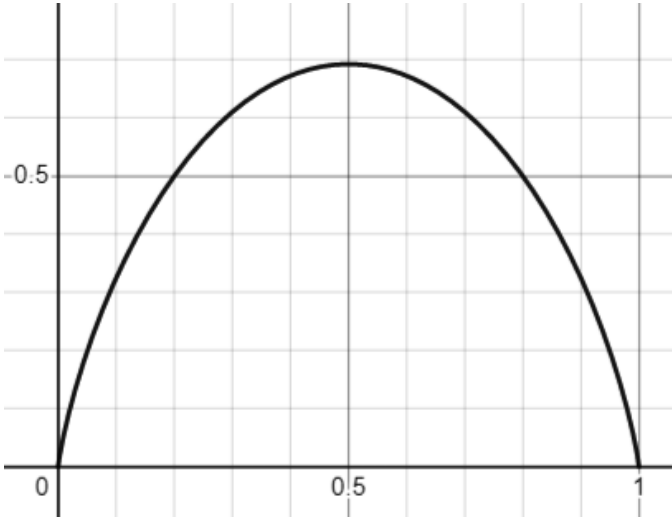
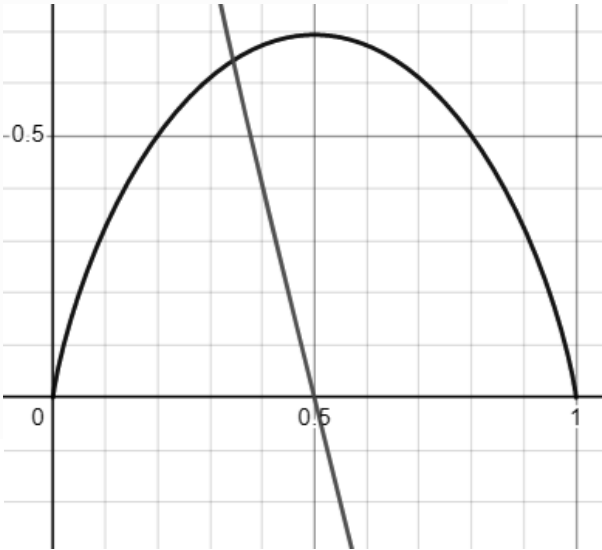

1

1

1

1

		2018-I	Shannon index	C / D
			<p>De Shannon-index H is een maat voor de diversiteit (verscheidenheid) van een dieren- of plantenpopulatie in een gebied. Hoe hoger de Shannon-index, hoe groter de diversiteit.</p> <p>We kijken naar een gebied met twee soorten bomen. De formule voor de Shannon-index is dan:</p> $H = -(p_1 \ln(p_1) + p_2 \ln(p_2))$ <p>waarin p_1 en p_2 de aandelen van elke soort binnen het gebied zijn. Er geldt bijvoorbeeld dat $p_1 = 0,37$ als 37% van de bomen uit soort 1 bestaat. Bos A bestaat voor 70% uit eiken en voor 30% uit beuken en bos B bestaat voor 90% uit eiken en voor 10% uit beuken.</p>	
3p	4		<p>Onderzoek met de formule voor H van welk van beide bossen de Shannon-index het grootst is.</p> <p>In een bos met twee soorten bomen, eiken en beuken, geldt: als p het aandeel eiken is, is het aandeel beuken gelijk aan $1 - p$. De formule voor de Shannon-index kan dan geschreven worden als:</p> $H = -(p \ln(p) + (1 - p) \ln(1 - p))$	
3p	5		<p>Onderzoek met de grafische rekenmachine tot welke waarde de Shannon-index nadert als het aandeel eiken in het bos steeds kleiner wordt.</p> <p>Met behulp van de afgeleide van H kunnen we onderzoeken bij welke verhouding eiken en beuken de Shannon-index maximaal is. Er geldt:</p>	
4p	6		$\frac{dH}{dp} = -\ln(p) + \ln(1 - p)$ <p>Bereken met behulp van $\frac{dH}{dp}$ voor welke percentages eiken en beuken de Shannon-index H van het bos maximaal is.</p>	

		2018-I	Shannon Index	C / D		
3p	4	$H = -(p_1 \ln(p_1) + p_2 \ln(p_2))$ Bos A: $H_A = -(0,7 \ln(0,7) + 0,3 \ln(0,3)) = 0,61\dots$ Bos B: $H_B = -(0,9 \ln(0,9) + 0,1 \ln(0,1)) = 0,32\dots$ $H_A > H_B$				1 1 1
3p	5	$H = -(p \ln(p) + (1-p) \ln(1-p))$ $y = -(x \ln(x) + (1-x) \ln(1-x))$ $x \rightarrow 0 \text{ dan } y \rightarrow 0$ $p \rightarrow 0 \text{ dan } H \rightarrow 0$				1 1 1
						
3p	6	$\frac{dH}{dp} = -\ln(p) + \ln(1-p)$ $H \text{ is maximaal als } \frac{dH}{dp} = 0$ $-\ln(p) + \ln(1-p) = 0$ $\ln(p) = \ln(1-p)$ $p = 1-p$ $p = 0,5$ 50% eiken				
						

		2018-I	Bitcoins	C
		<p>De bitcoin is een digitale munteenheid die alleen online bestaat. Hij bestaat sinds 1 januari 2009 en kan worden gebruikt om te betalen in webwinkels of voor andere online diensten.</p> <p>Bitcoins worden niet, zoals normaal geld, door een centrale bank in omloop gebracht. In plaats daarvan zijn alle bitcoins die in omloop zijn, gecreëerd door computers mee te laten werken aan oplossingen van geselecteerde wiskundige problemen. Dat werkt als volgt: Iedereen kan op zijn of haar computer speciale software laten draaien die meewerkt aan het oplossen van zo'n wiskundig probleem. De eigenaar van de computer die de oplossing voor een probleem vindt, krijgt daarvoor 25 (nieuw gecreëerde) bitcoins als beloning. Omdat er in 2014 iedere 10 minuten zo'n probleem werd opgelost, werden er op deze manier iedere 10 minuten 25 bitcoins in omloop gebracht.</p> <p>Op 1 januari 2014 waren er (ongeveer) 12,2 miljoen bitcoins in omloop. Bereken uitgaande hiervan in welk jaar het aantal bitcoins in omloop boven de 18 miljoen uitstijgt als de snelheid waarmee bitcoins in omloop gebracht worden niet verandert.</p> <p>In werkelijkheid blijft de snelheid waarmee bitcoins in omloop worden gebracht niet gelijk aan 25 bitcoins per 10 minuten. Deze snelheid neemt namelijk af. Gedurende de eerste vier jaar, van 1 januari 2009 tot 1 januari 2013, was de beloning per oplossing nog 50 bitcoins. De beloning voor het vinden van een oplossing wordt elke vier jaar gehalveerd: van 1 januari 2013 tot 1 januari 2017 is de beloning per oplossing 25 bitcoins, voor de vier jaar erna 12,5 bitcoins per oplossing enzovoorts.</p>		
3p	7			
4p	8	<p>Bereken vanaf welk jaar de beloning per oplossing minder dan één bitcoin zal zijn.</p> <p>Het totale aantal bitcoins dat in omloop gebracht kan worden, is begrensd. Dat is een gevolg van (onder andere) het feit dat de beloning per oplossing steeds gehalveerd wordt. Het totale aantal bitcoins dat in omloop is, kan worden benaderd met de formule:</p> $C = 21 - 21 \cdot 0,5^{0,25 \cdot t}$ <p>Hierin is C het totale aantal bitcoins in miljoenen en t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2009.</p>		
3p	9	<p>Bepaal met behulp van een redenering aan de hand van de formule de grenswaarde van het totale aantal bitcoins dat in omloop is.</p>		

		<p>Om het totale aantal bitcoins dat in omloop is te reguleren, wordt niet alleen het aantal bitcoins per oplossing kleiner gemaakt, maar wordt ook de moeilijkheidsgraad van de wiskundige problemen steeds groter gemaakt. Er zijn namelijk steeds meer mensen die hun computers mee laten rekenen.</p> <p>De moeilijkheidsgraad van de problemen stijgt exponentieel volgens de formule $D = 3,65 \cdot e^{0,533 \cdot t}$</p> <p>Hierin is D een maat voor de moeilijkheidsgraad en t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 januari 2013. Hierbij geldt dat hoe groter D is, hoe moeilijker het op te lossen probleem is.</p>
4p	10	<p>Stel de formule van de afgeleide van D op en beredeneer hoe je aan deze formule kunt zien dat de grafiek van D toenemend stijgend is.</p>
4p	11	<p>De formule kan zó worden herschreven dat je een moeilijkheidsgraad kunt invullen en zo de tijd in maanden kunt berekenen die nodig is om die moeilijkheidsgraad te bereiken.</p> <p>Herschrijf de formule $D = 3,65 \cdot e^{0,533 \cdot t}$ zó dat t wordt uitgedrukt in D.</p>